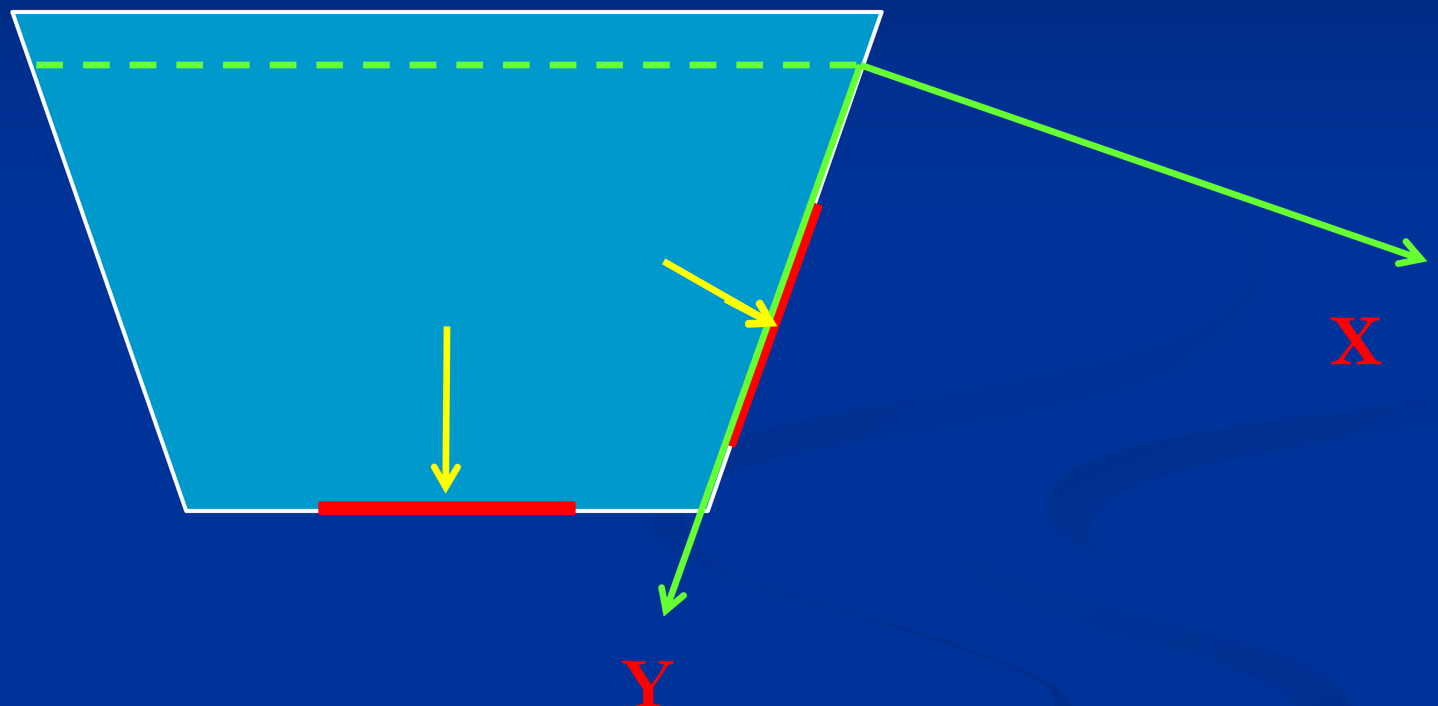
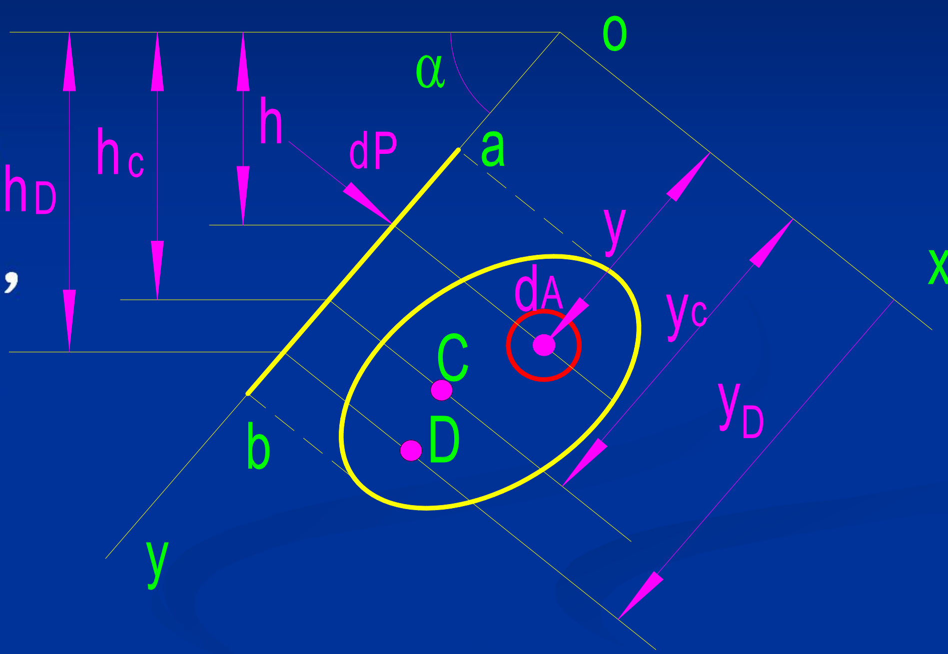
第五节　作用于平面的液体压力



第五节　作用于平面的液体压力

$$dP = pdA = \gamma hdA$$

由于流体静压强的方向沿着作用面的内法线方向，所以，作用在平面上各点的水静压强的方向相同，其合力可按平行力系求和原理解决



$$P = \int dP = \int_A pdA = \int_A \gamma hdA = \gamma \cdot \sin\alpha \int_A ydA$$

$\int_A ydA$ 是受压面积A对x轴的静面矩=Ay_c

$$P = \gamma \sin\alpha y_c A = \gamma h_c A = p_c A$$

$$P = \gamma \sin \alpha y_c A = \gamma h_c A = p_c A$$

- 作用在任意位置、任意形状平面上的水静压力值等于受压面面积与其形心点所受水静压强的乘积。

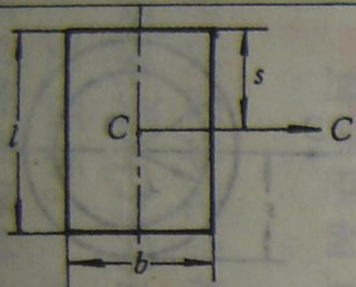
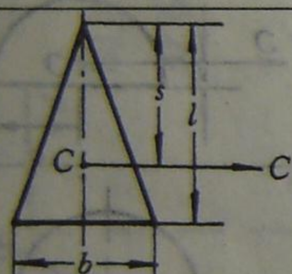
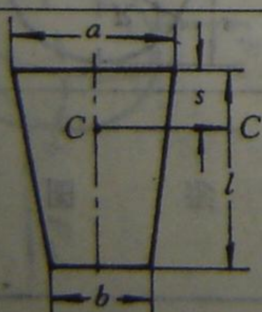
- 水静压力的方向，沿着受压面的内法线方向。

- 作用在任意位置、任意形状平面上的水静压力等于受压面面积与其形心点所受水静压强的乘积。
- 水静压力的方向：沿受压面的内法线方向。
- 压力中心由以下公式确定：

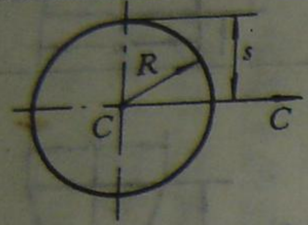
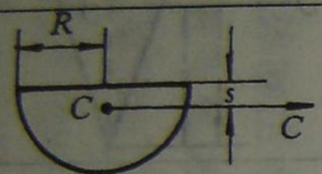
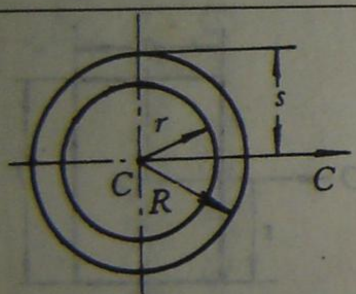
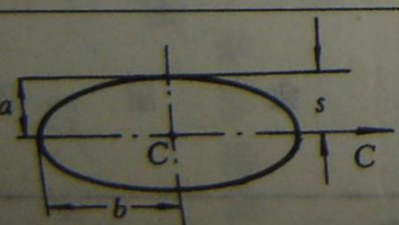
$$y_D = y_c + \frac{J_c}{y_c \cdot A}$$

- 压力中心总是低于形心。

表 2-2　几种平面图形的 I_C、s 及 A 值

平面图形		对于通过形心而与对称轴垂直的 $C-C$ 轴的惯性矩 I_C	图形顶点（边）到形心的距离 s	面积 A
矩　形		$\frac{1}{12}bl^3$	$\frac{1}{2}l$	bl
三角形		$\frac{1}{36}bl^3$	$\frac{2}{3}l$	$\frac{1}{2}bl$
梯　形		$\frac{1}{36}l^3\left(\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}\right)$	$\frac{1}{3}l\left(\frac{a+2b}{a+b}\right)$	$\frac{1}{2}l(a+b)$

（续表）

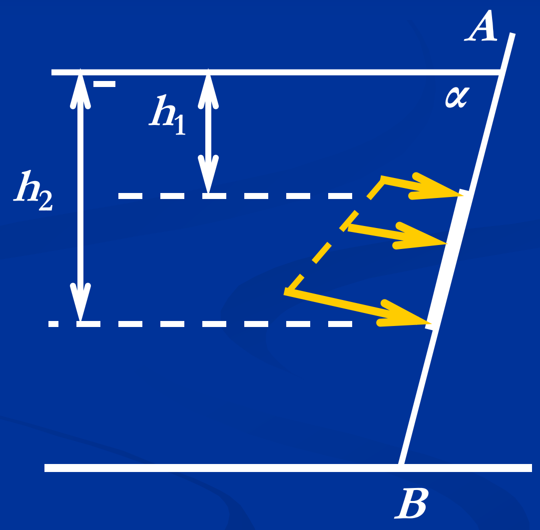
平　面　图　形		对于通过形心而与对称轴垂直的 $C-C$ 轴的惯性矩 I_C	图形顶点（边）到形心的距离 s	面　积　A
圆　形		$\frac{1}{4}\pi R^4$	R	πR^2
半圆形		$\frac{(9\pi^2-64)}{72\pi}R^4$	$\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$	$\frac{1}{2}\pi R^2$
环　形		$\frac{1}{4}\pi(R^4-r^4)$	R	$\pi(R^2-r^2)$
椭圆形		$\frac{1}{4}\pi a^3 b$	a	πab

图解法

对于底边平行于液面的矩形平面，还可采用图算法求解作用在平面上的静水总压力大小与作用点。

设一底边平行于液面的矩形AB，与水面夹角α，宽度b，上、下底边的淹深分别为h_1、h_2。

根据解析法

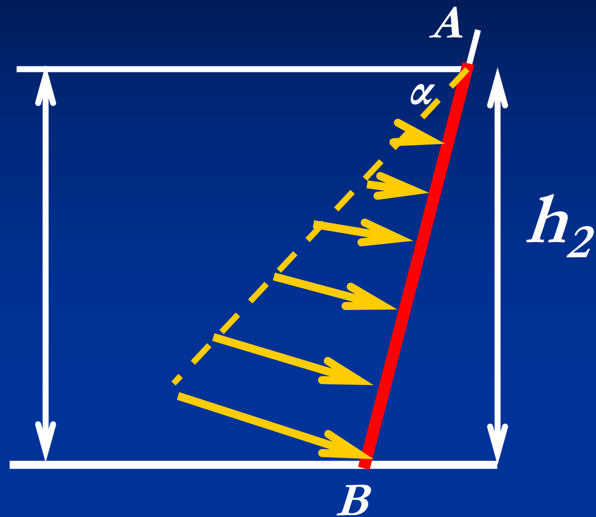


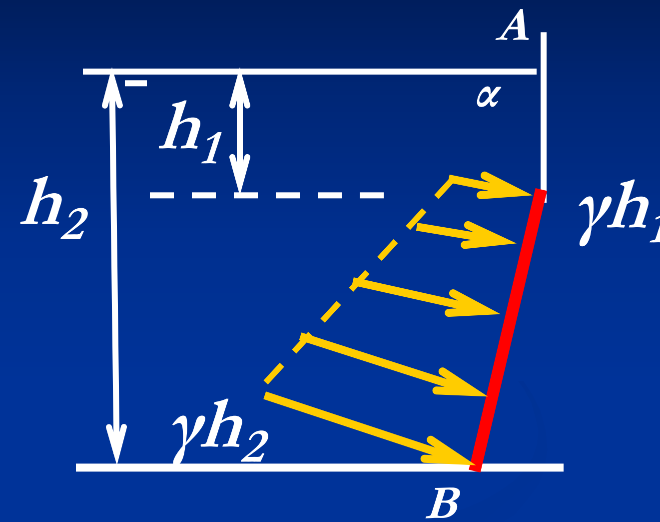
$$F_P = p_c A = \rho g\left(h_1 + \frac{h_2 - h_1}{2}\right)\frac{h_2 - h_1}{\sin\alpha} b$$

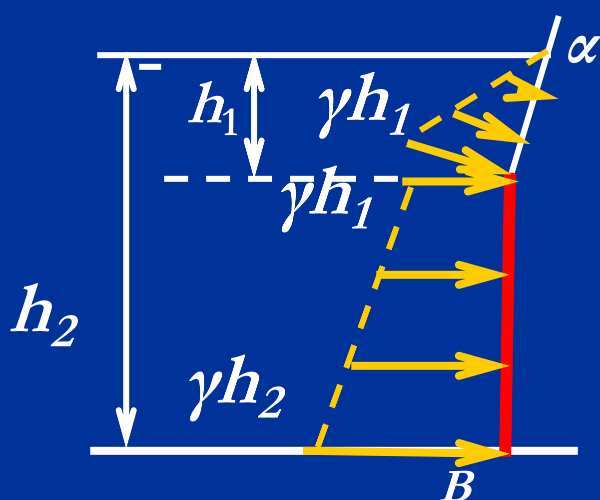
$$= \frac{1}{2}\left(\rho g h_1 + \rho g h_2\right)\frac{h_2 - h_1}{\sin\alpha} b = A_p b$$

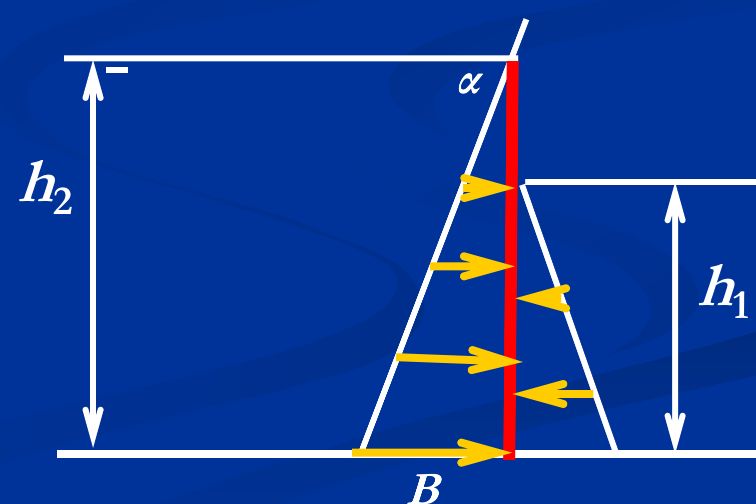
式中A_p为压强分布图的面积。

总压力作用线通过压强分布图的形心。


A
α
h_2
B


A
h_1
α
h_2
γh_1
γh_2
B

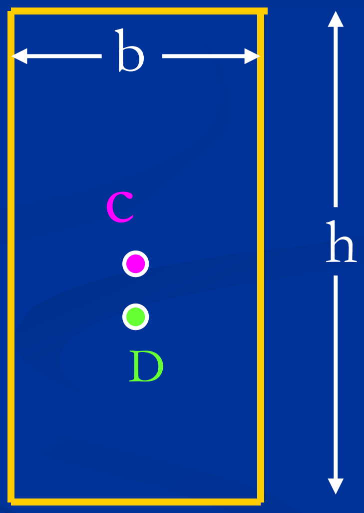

α
h_1
γh_1
γh_1
h_2
γh_2
B


α
h_2
h_1
B

例2-5：一铅直矩形闸门，顶边水平，所在水深h_1=1m，闸门高 h=2m，宽b=1.5m，求水静压力P的大小及作用点。

解：$P = p_c A$

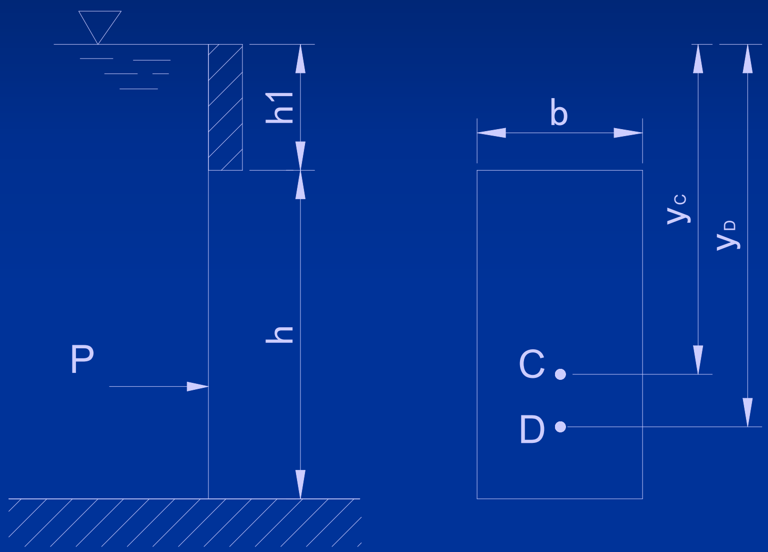
$$= 9.807 * 2 * 3 = 58.84kN$$



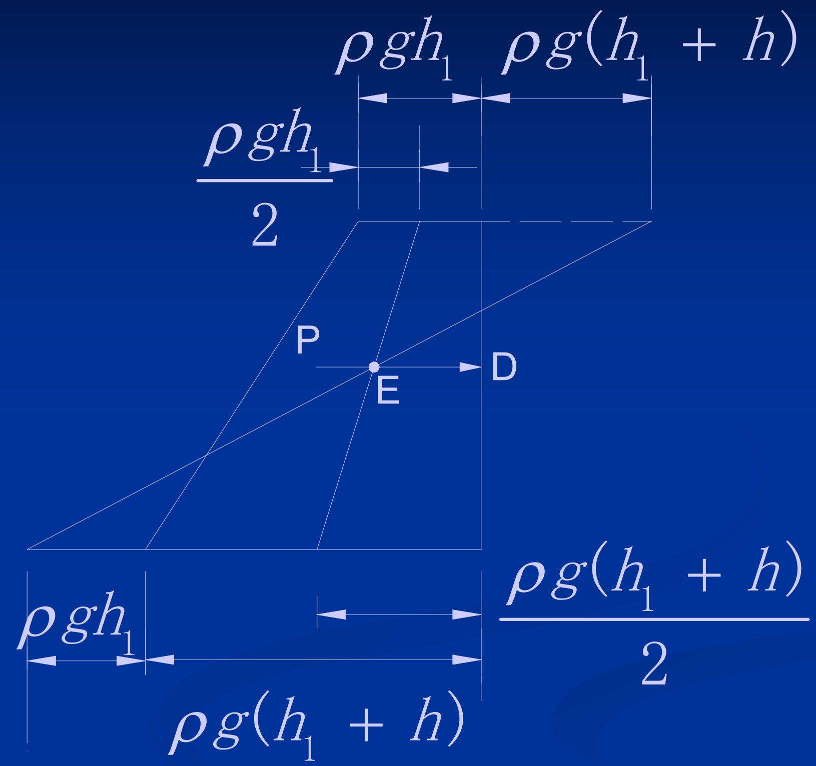
$$y_D = y_c + \frac{J_c}{y_c \cdot A}$$

$$J_c = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} * 1.5 * 2^3 = 1m^4$$

$$y_D = 2 + \frac{1}{2 * 1.5 * 2} = 2.17m$$


h1
h
P
b
y_C
y_D
C
D

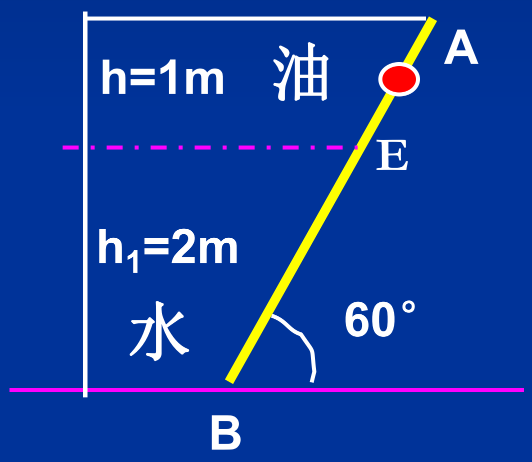
（a）


$\rho g h_1$
$\rho g(h_1+h)$
$\frac{\rho g h_1}{2}$
P
E
D
$\frac{\rho g(h_1+h)}{2}$
$\rho g h_1$
$\rho g(h_1+h)$

（b）

图2-28

2-29：倾角α=60°的矩形闸门AB，上部深h=1m，下部水深h_1=2m，$\gamma_{油}$=7.84KN/m³，求作用在闸门每米宽度上的水静压力及其作用点。



解：闸门上下所处的液体不同，因此要上下分别进行计算，板AE所受的力P_1为：

$$P_1 = \gamma_{油} h_{c1} A_1$$

$$h_{c1} = \frac{h}{2} = 0.5m \qquad A_1 = h \Big/ \sin 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} m$$

$$P_1 = 4.53KN$$

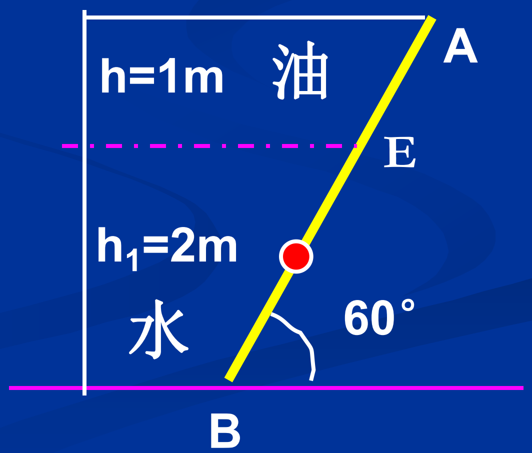
板BE所受的力P_2为：
$$P_2 = p_{c2}A_2$$

$$p_{c2} = \gamma_{油}h + \gamma_{水}\,{}^{h_1}\!/_{2}\,,\; A_2 = {}^{h_1}\!/_{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}m^2$$

$$P_2 = 40.75KN$$

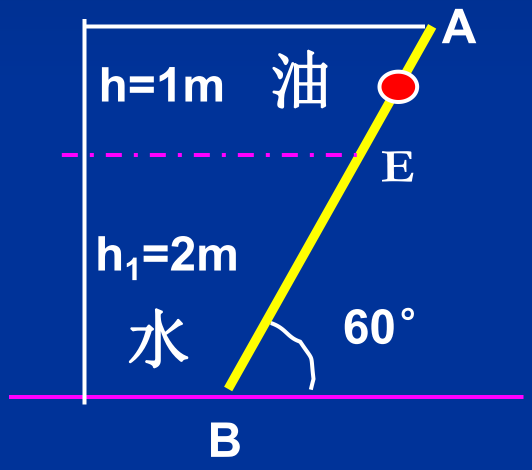
板AB所受的力P为：

$$P = P_1 + P_2 = 45.28KN$$



上板AE的压力中心为y_{D1}：

$$y_{D1} = y_{c1} + \frac{J_{A1}}{y_{c1}A_1}$$



$$y_{c1} = 0.5 \Big/ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}, J_{A1} = \frac{1}{12} bAE^3 = \frac{2\sqrt{3}}{27}$$

$$y_{D1} = 0.77m$$

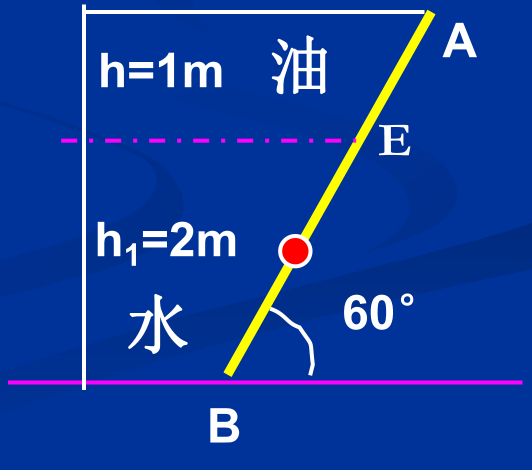
下板BE的压力中心为y_{D2}：$y_{D2} = y_{c2} + \dfrac{J_{A2}}{y_{c2}A_2}$

$$y_{c2} = AE + BE/2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$A_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}, J_{A2} = \frac{1}{12}bBE^3 = \frac{16\sqrt{3}}{27}$$

$$y_{D2} = 2.5m$$

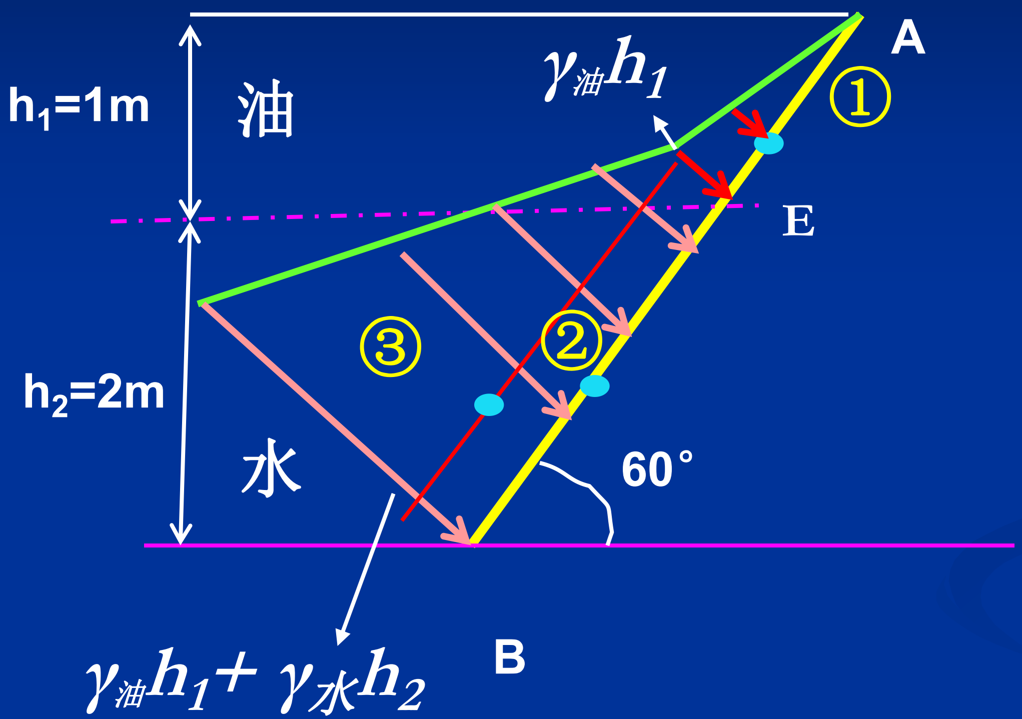
闸门上下板所受压力分别对自由面的力矩之和与总压力对自由面的力矩应该相等：



$$P_1 \times y_{D1} + P_2 \times y_{D2} = P \times y_D$$

带入数据得y_D： $y_D = 2.33m$

二、图解法



$$P_1 = \gamma_{油} h_1 \cdot AE \cdot 1$$

$$P_2 = \gamma_{油} h_1 \cdot BE \cdot 1$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \gamma_{水} h_2 \cdot BE \cdot 1$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = P$$

$$P_1 \cdot \frac{2}{3} AE + P_2 \cdot (AE + \frac{1}{2} BE) + P_3 \cdot (AE + \frac{2}{3} BE) = P \cdot Y_D$$

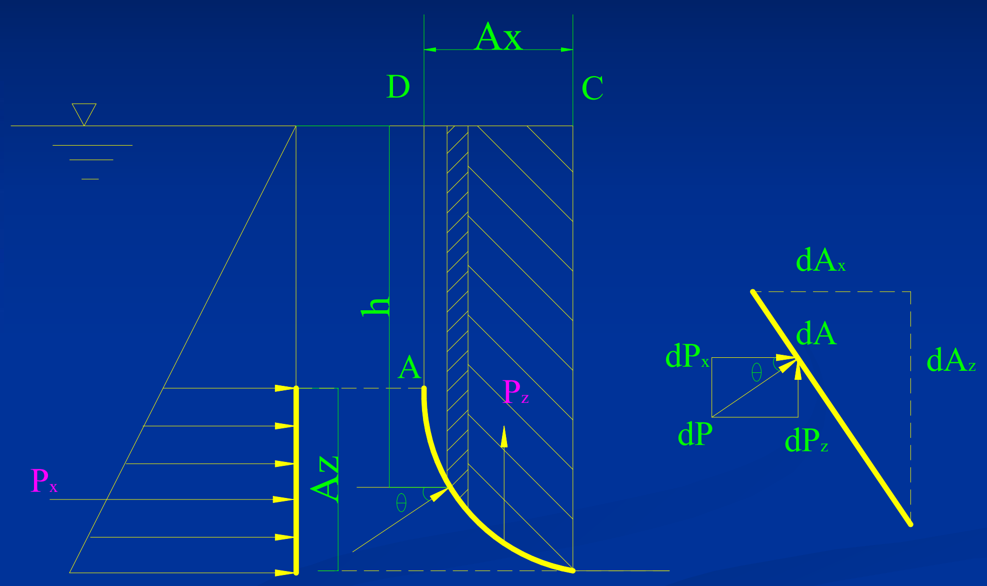
第六节 作用于曲面的液体压力

$$dP = pdA = \gamma hdA$$

求曲面上的水静压力时，一般将其分为水平方向和铅直方向的分力分别进行计算。

$$dP_x = dP\cos\theta = \gamma hdA\cos\theta$$

$$dP_z = dP\sin\theta = \gamma hdA\sin\theta$$



作用于柱体曲面的压力

dA_x, dA_z 表示两个面上的投影

$$dP_x = \gamma hdA_z$$

$$dP_z = \gamma hdA_x$$

$$\Longrightarrow$$

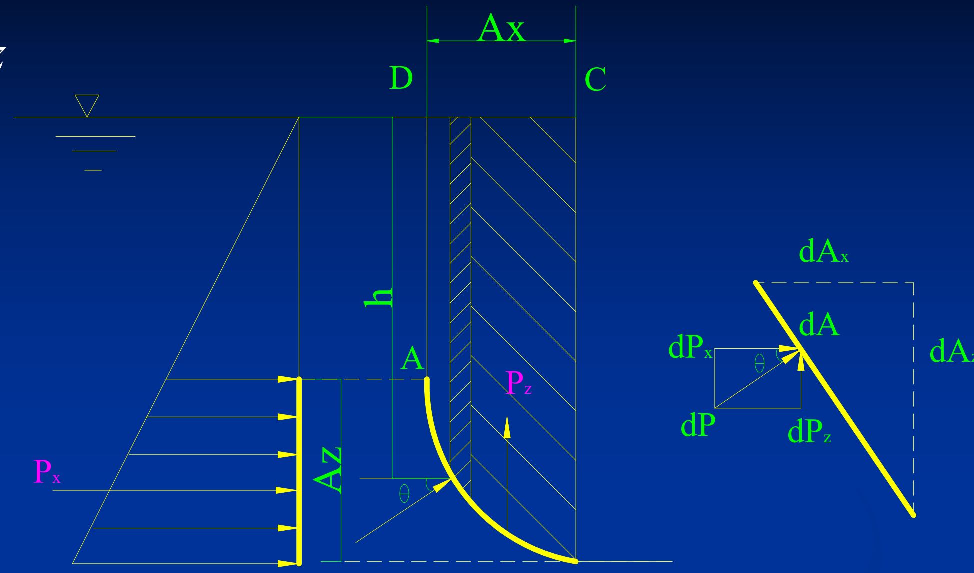
$$P_x = \int_{A_z} \gamma hdA_z = \gamma\int_{A_z} hdA_z$$

$$P_z = \int_{A_x} \gamma hdA_x = \gamma\int_{A_x} hdA_x$$

$$P_x=\int_{A_z}\gamma h\,dA_z=\gamma\int_{A_z}h\,dA_z$$

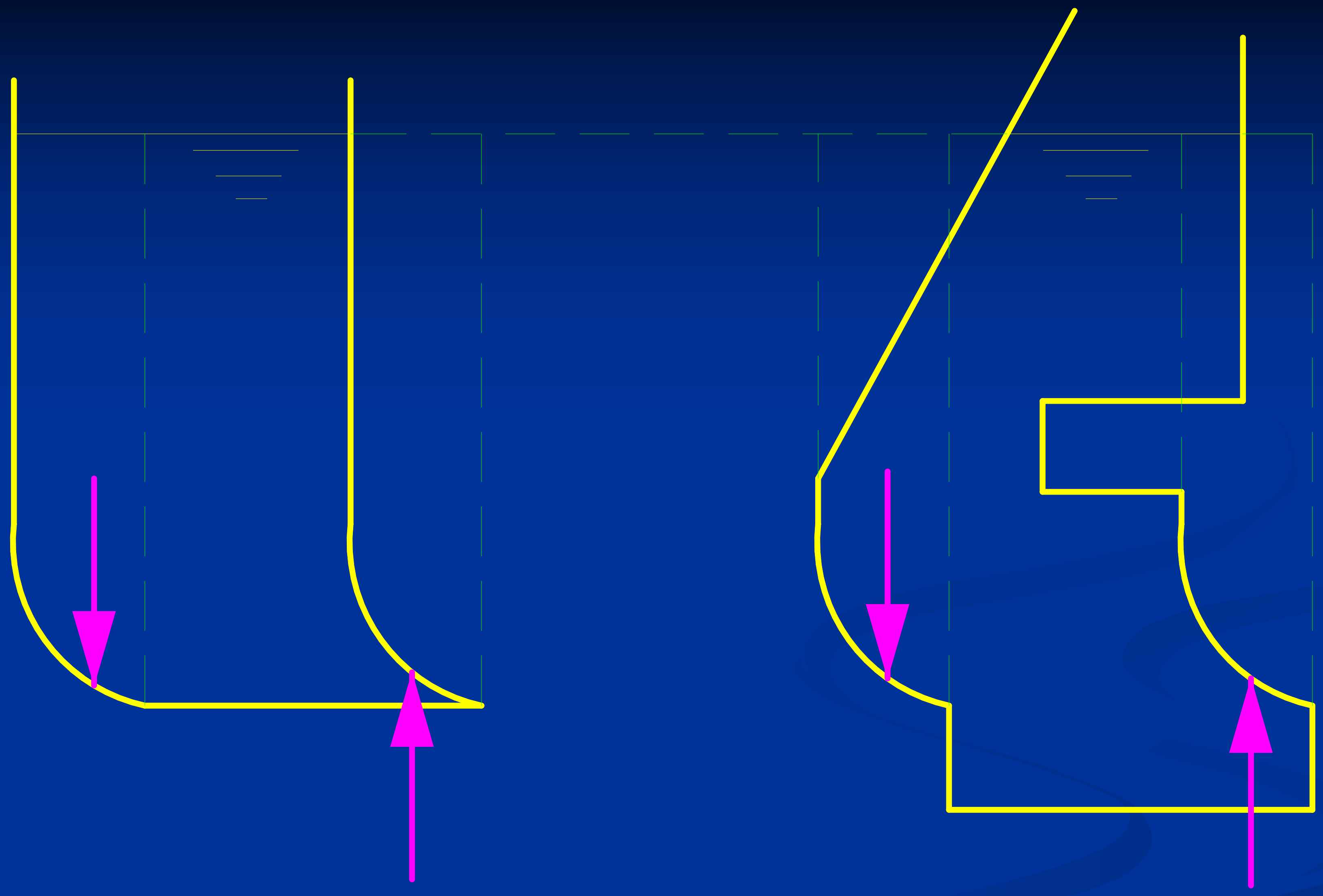
$$P_x=\gamma h_c A_z$$

$$P_z=\gamma\int_{A_x}h\,dA_x=\gamma V$$



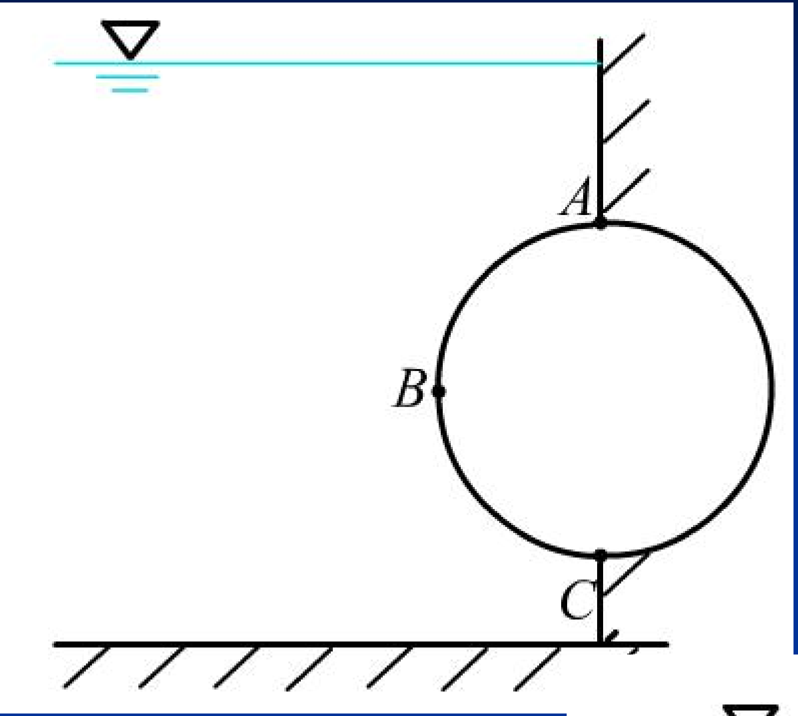
- 水平分力等于该曲面的铅直投影面上的水静压力。
- 铅直分力等于其压力体内的水重。
- **压力体**是由三种面组成的封闭几何体：受压曲面、受压曲面在自由面（或其延长面）上的投影面、受压曲面边界线所作的铅直面。
- 合力： $P=\sqrt{P_x^2+P_z^2}$ 　　 $\theta=\tan^{-1}\dfrac{P_z}{P_x}$

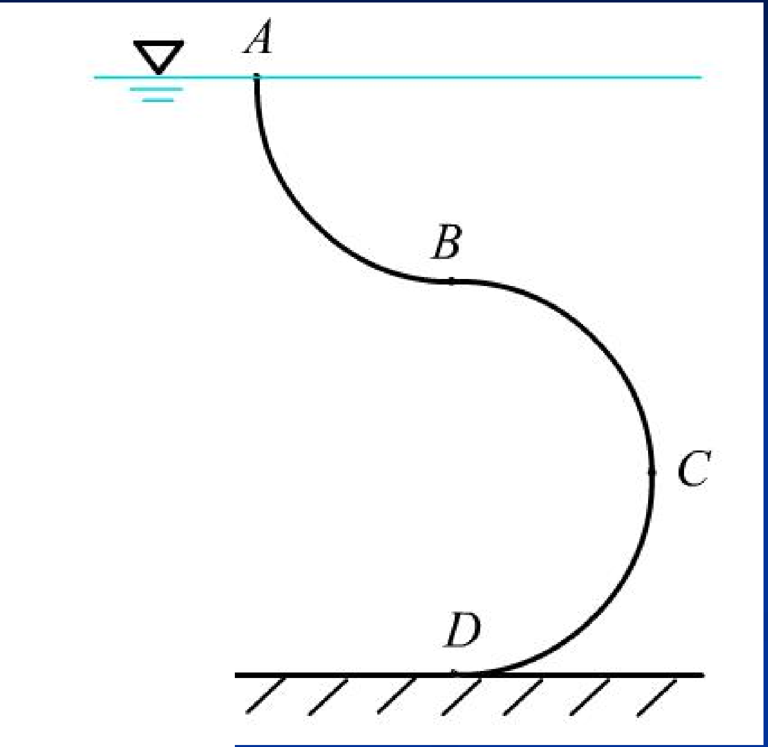
压力体演示

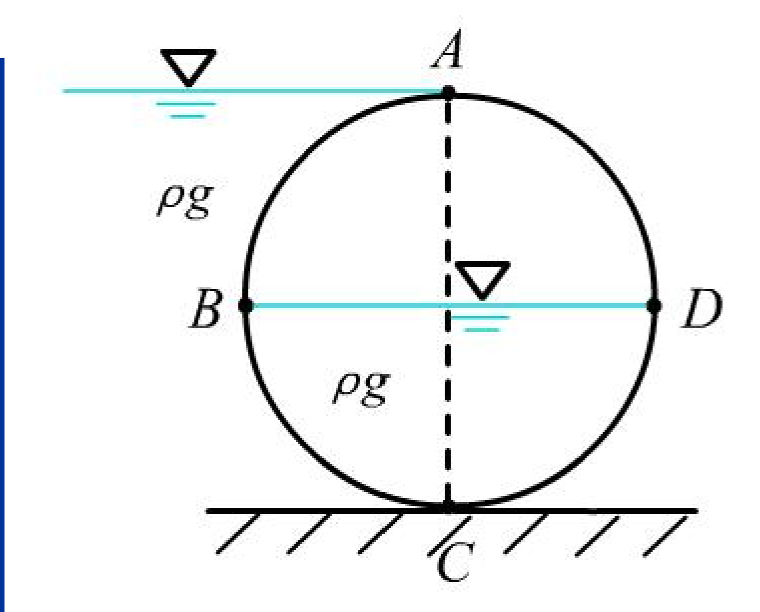


曲面上的压力体

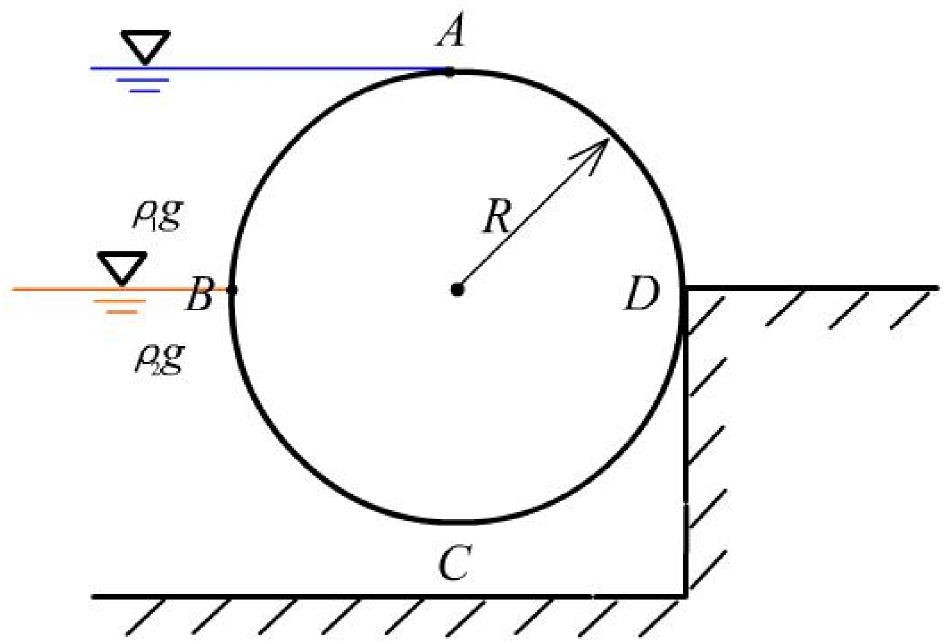
曲面压力体及其绘制方法

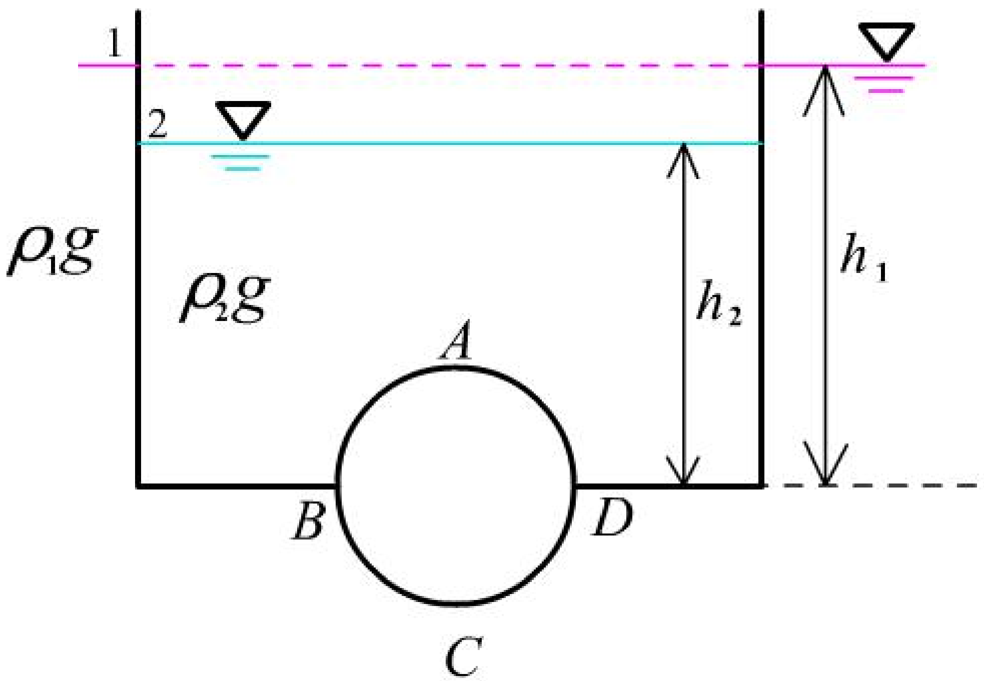




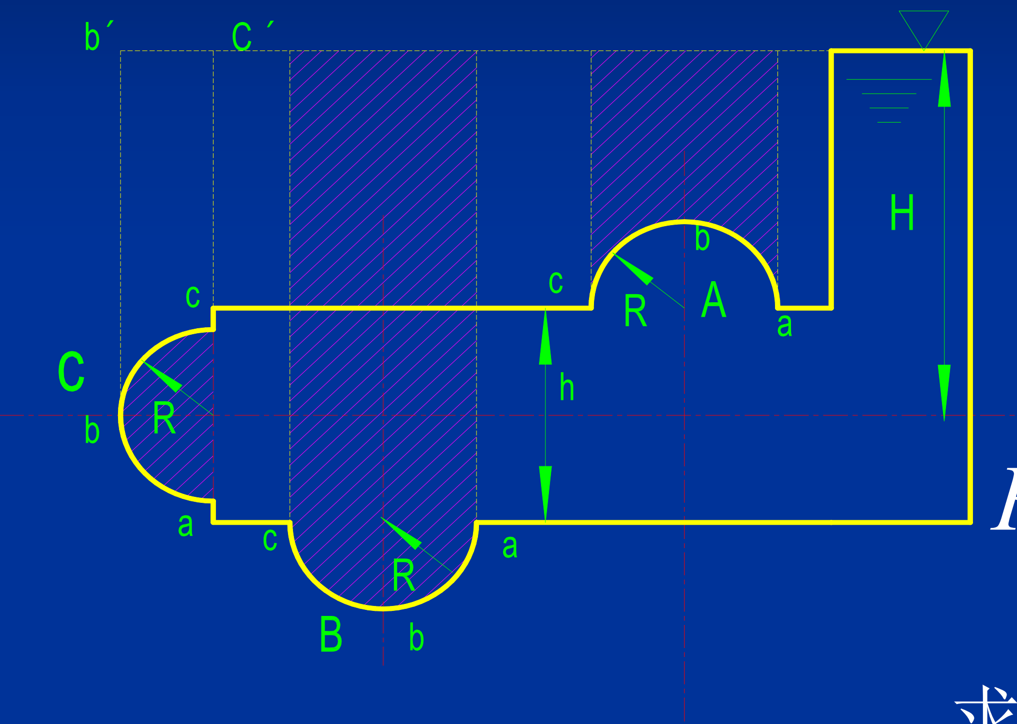


曲面压力体及其绘制方法





例题2-6：储水容器上有三个半球形盖，已知H=2.5m，h=1.5m，R=0.5m，求作用于三个半球形盖的水静压力.



解：求各半球盖所受的水平分力：

$$P_{Ax}=0$$

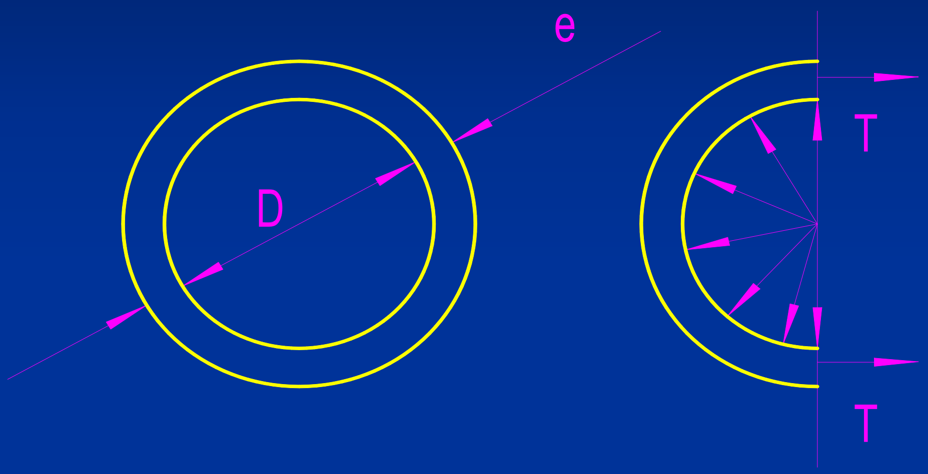
$$P_{Bx}=0$$

$$P_{Cx}=p_c A_{cz}=\gamma H\frac{1}{4}\pi d^2$$

求各半球盖所受的铅直分力：

$$P_z=\gamma V$$

例题2-7:一水管的压强为4903.5kPa, 管内径D=1m,管材的允许拉应力为147.1MPa, 求管壁应有的厚度.



解：本题管内压强很高,在这种情况下,重力的影响是可以忽略的.

作用在半环内表面上的铅直分力为0.

水平分力为:

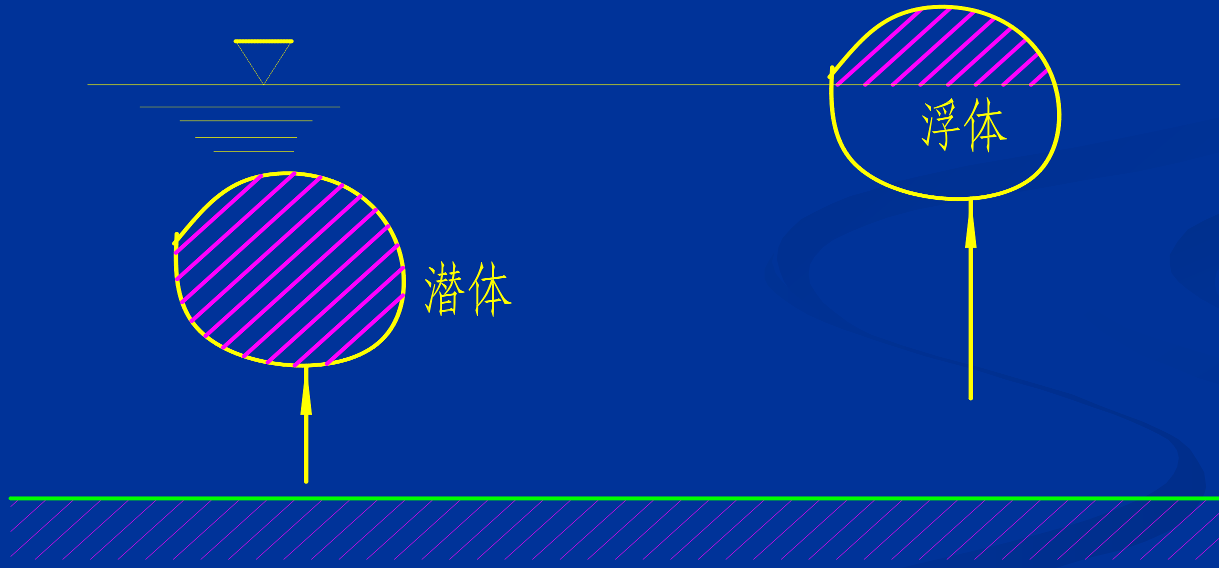
$$P_x = pA = pD$$

$$2T = P_x \longrightarrow T = \frac{1}{2}P_x = \frac{1}{2}pD$$

$$[\sigma] = \frac{T}{e \times 1} \longrightarrow e = \frac{pD}{2[\sigma]}$$

潜体或浮体的压力计算：

- 潜体或浮体的水平分压力均为零。
- 潜体或浮体的压力体均为物体浸入液体的体积，也就是物体排开液体的体积。所受浮力等于物体排开液体的重量，即阿基米德原理。



潜体的稳定与平衡

第七节　流体平衡微分方程

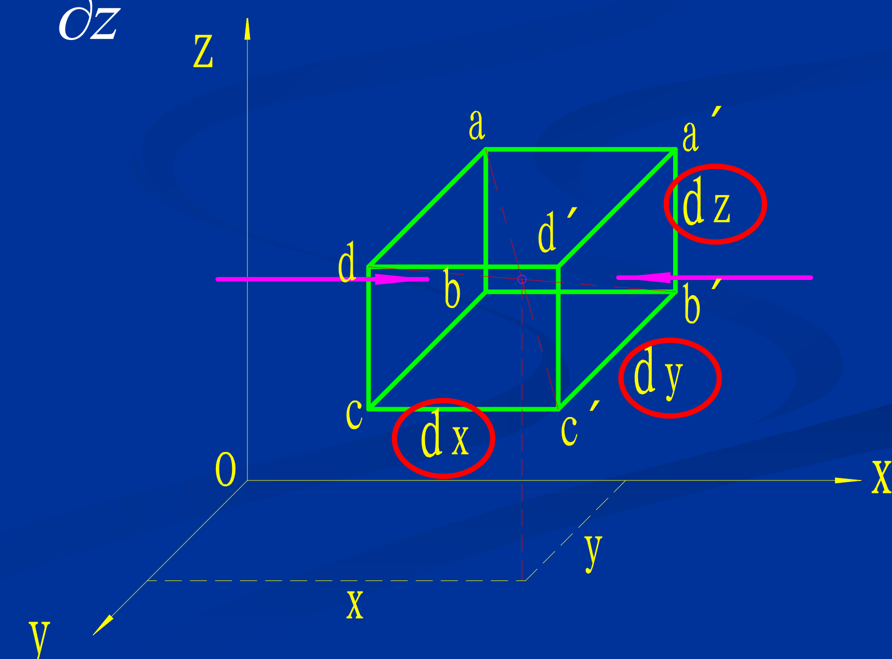
作用在六面体上的外力有质量力和表面力，列X轴向平衡方程为：

$$(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx)dydz-(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx)dydz+X\rho dxdydz=0$$

$$\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}=0 \quad \rho Y-\frac{\partial p}{\partial y}=0 \quad \rho Z-\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

上式即流体平衡微分方程（欧拉方程），也可写为：

$$\begin{cases} X=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ Y=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ Z=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$



$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ Y = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ Z = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

- 欧拉平衡方程指出流体处于平衡状态时，作用于流体上的质量力与压强递增率之间的关系。
- 平衡流体受哪个方向的质量分力，则流体静压强沿该方向必然发生变化；反之，如果哪个方向没有质量分力，则流体静压强在该方向上必然保持不变。

$$\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

将 $$\rho Y-\frac{\partial p}{\partial y}=0$$ **分别乘以dx, dy, dz相加，得**

$$\rho Z-\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$$

$$\Downarrow$$

$$dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$$

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$$

如果流体是不可压缩的，则上式右边括号内的数值必然是某一函数的全微分

$$dW = Xdx + Ydy + Zdz$$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = X, \frac{\partial W}{\partial y} = Y, \frac{\partial W}{\partial z} = Z$$

满足 $dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$ 的函数W（x, y, z)称为**势函数**

具有这样势函数的质量力称为**有势的力**

- 函数 $W(x,y,z)$ 称为势函数。
- 具有势函数的力称为有势的力。
- 液体只有在有势的质量力的作用下才能平衡。

重力各轴向分力为：
$$X = 0$$
$$Y = 0$$
$$Z = -g$$

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) = -\rho g dz = -\gamma dz$$

积分上式得： $p = -\gamma Z + C$

即： $$Z + \frac{p}{\gamma} = C$$

等压面及其特性

$$dp = \rho dW = 0$$

$$W = C$$

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

- 等压面即等势面
- 等压面和质量力正交（这是等压面的重要性质）