

# Cloze Test

- 有一個英文老師出了一道這樣的克漏字難題, 題目是這樣子的:
- \_\_\_\_\_ is better than the God.
- \_\_\_\_\_ is worse than the Evil.
- If you eat \_\_\_\_\_, you will die. (三個空格是同一個字)

沒有人解的出來, 結果有一個數學老師用數學的方法解出來了。

- 設上帝之善是  $+\infty$ ; 惡魔之惡是  $-\infty$ 。
- 令所求為  $X$ , 則  $X > +\infty$ 、 $X < -\infty$
- $\therefore X$  屬於空集合
- $\therefore X = \text{nothing}$

# 家 书

September Sixth, 1997

Dear Mom and Dad:

Guess what I need? Please send some as soon as possible. Thank\$.

Best wishes,

Your Son Sam

# 父母的回函更是技高一籌

NOvember second, 1997

Dear Sam:

NOthing much is happening here. NObody is sick.

We have NOthing else to tell you.

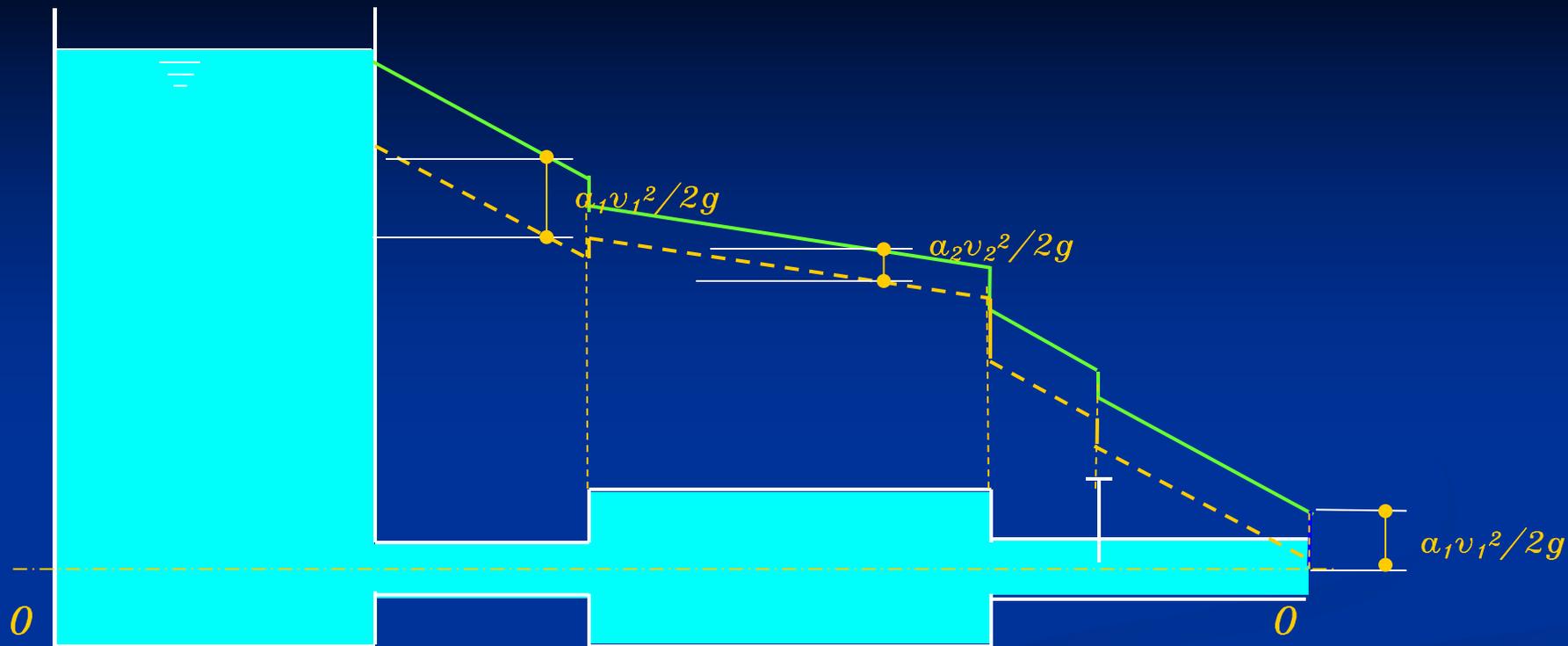
Please write aNOther letter soon. Bye for NOw.

# 第四章 流动阻力和能量损失

- 🔔 能量损失的计算是专业中重要的计算问题之一。
- 🔔 不可压缩流体在流动过程中，流体之间因相对运动切应力的做功、流体与固壁之间摩擦力的做功，都是靠损失流体自身所具有的机械能来补偿的。这部分能量均不可逆地转化为热能。
- 🔔 能量损失一般有两种表示方法：
  - ✓ 对于液体：用单位重量的流体的能量损失（水头损失）来表示。
  - ✓ 对于气体：用单位体积内流体的能量损失（压强损失）来表示。

# 第一节 沿程损失和局部损失

- 🔔 在边壁沿程不变的管段上，流动阻力沿程也基本不变，称这类阻力为**沿程阻力**。克服沿程阻力引起的能量损失称为**沿程损失**。也称**摩擦损失或长度损失**。
- 🔔 在边界急剧变化的区域，阻力主要地集中在该区域内及其附近，这种集中分布的阻力称为**局部阻力**。克服局部阻力的能量损失称为**局部损失**。引起局部阻力的原因是由于**旋涡区的产生和速度方向和大小的变化**。
- 🔔 整个管路的能量损失等于各管段的**沿程损失**和各**局部损失的总和**。



设  $J=h_f/L$ ，则称 $J$ 为水力坡度。  
 工程上称为单位长度摩擦阻力损失，  
 也称为比摩阻。

能量损失的计算公式:

🔔 用水头损失表达时:

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad h_m = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

🔔 用压强损失表达时:

$$p_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}$$

$$p_m = \zeta \frac{\rho v^2}{2}$$

核心问题是各种流动条件下 $\lambda$ 和 $\zeta$ 的计算。

《出埃及记》曾经描述了这样一个场面，当摩西带领以色列人逃离埃及时，红海海水从中间分开露出一条通道，从而使以色列人摆脱了法老的追兵。

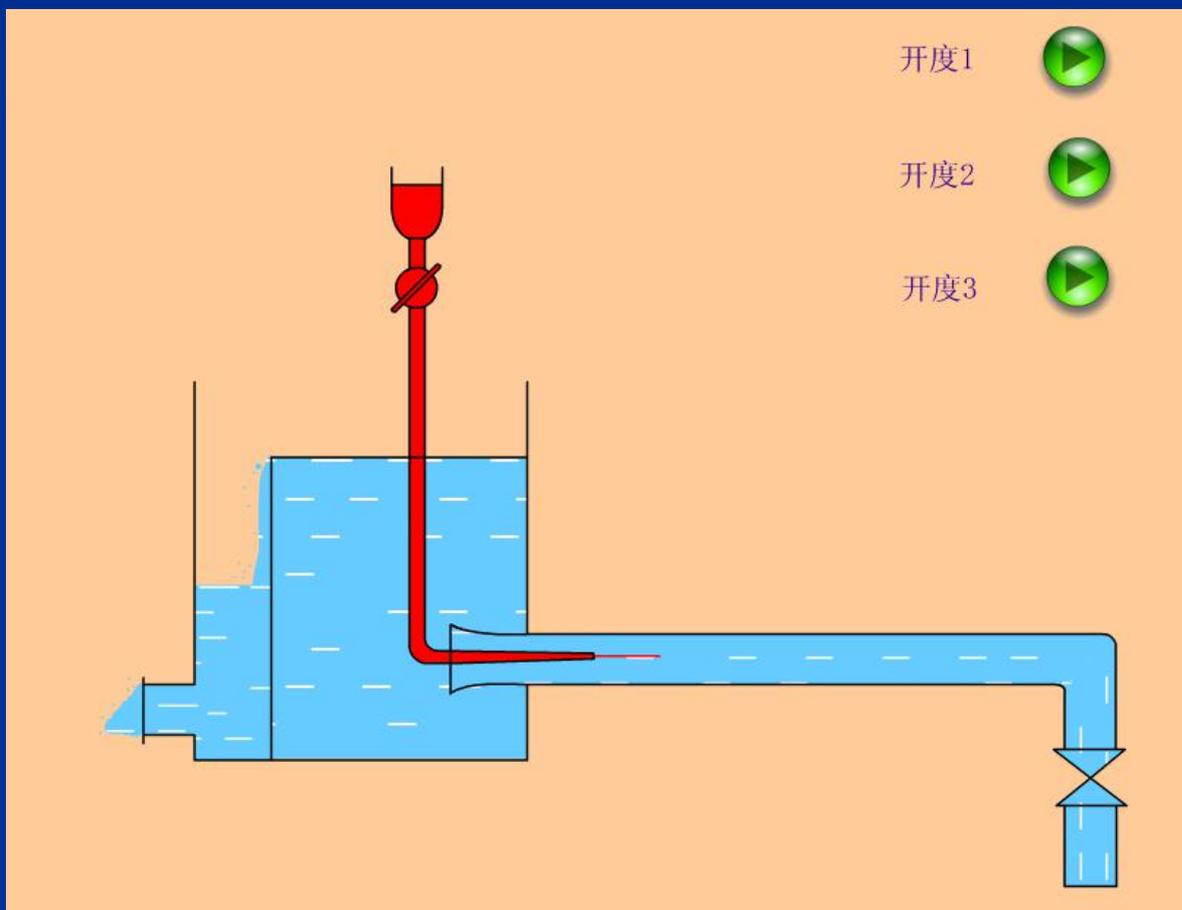


美国科学家的模拟结果显示，强风完全可能在一个特定的地点打开一个陆地通道，让人踏着泥泞安全通过。相关结果已经发表在可以公开浏览的期刊Plos One上。



## 第二节 层流与紊流、雷诺数

流体运动有两种结构不同的流动状态，  
能量损失的规律与流态密切相关。



雷诺实验

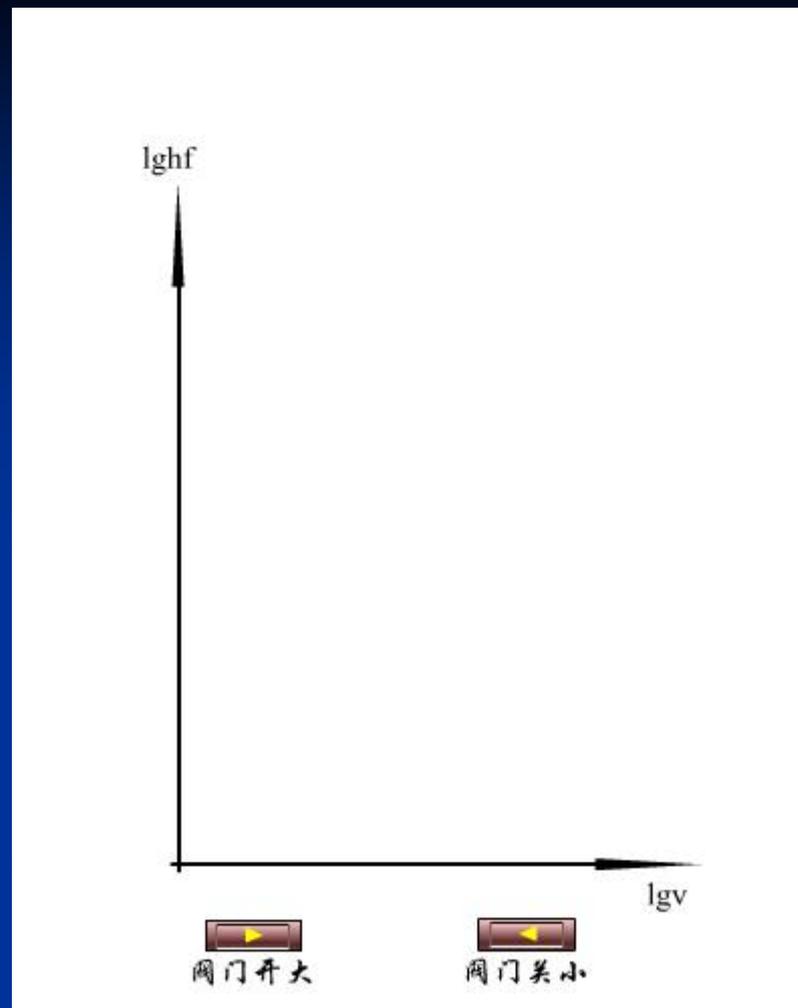
🔔 分层有规则的流动状态称为**层流**。

🔔 流体质点的运动轨迹极不规则，各部分流体互相剧烈掺混的流动状态称为**紊流**。

🔔 上临界流速、下临界流速

🔔 以后所指的临界流速都是**下临界流速**。

🔔 沿程水头损失与平均流速的关系曲线  $h_f = Kv^m$



流速小时即ab段， $m=1$ ；流速较大时在def段， $m=1.75-2.0$

# 流态的判别准则——临界雷诺数

🌸 实验表明：流动状态不仅和流速有关，还和管径、流体的动力粘滞系数和密度有关。

🌸 以上四个参数可组合成一个无因次数，叫做雷诺数 $Re$

$$Re = \frac{vd\rho}{\mu} = \frac{vd}{\nu}$$

🌸 尽管当管径或流动介质不同时，临界流速不同，但对于任何管径和任何牛顿流体，判别流态的临界雷诺数却是相同的，其值约为2000。

🌸  $Re$ 在2000和4000之间是层流向紊流转变的过渡区，工程上为简便起见，假设当 $Re$ 大于2000时，流动处于紊流状态。

🌸 临界雷诺数 $Re$ 等于2000是仅就圆管而言的。

例4-1：有一管径为25mm的室内上水管，如管中流速为1m/s，水温10℃。（1）判别管中水的流态；  
（2）管内保持层流状态的最大流速为多少？

解：

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{vd}{\nu} \\ &= \frac{1.0 \times 0.025}{1.31 \times 10^{-6}} = 19100 > 2000 \end{aligned}$$

故管中水流为紊流

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{v_k d}{\nu} = 2000 \\ v_k &= \frac{2000 \times 1.31 \times 10^{-6}}{0.025} = 0.105 \text{ m/s} \end{aligned}$$

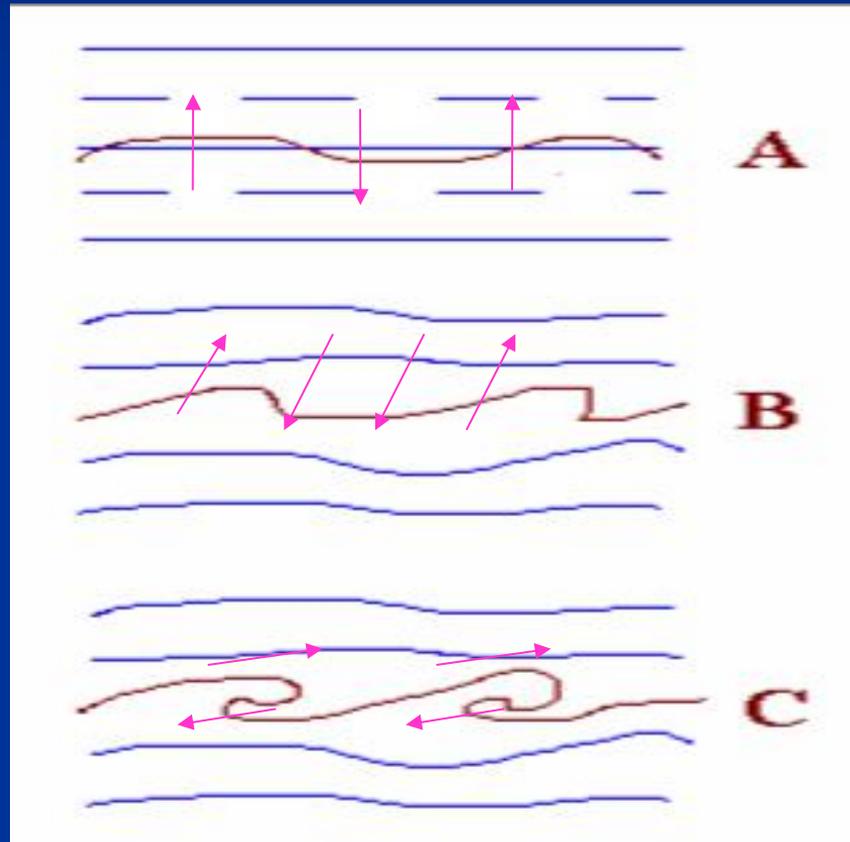
例4-2、4-3

🌸 层流与紊流的根本区别在于：

层流各流层间互不掺混，只存在粘性引起的各流层间的滑动摩擦阻力；紊流时则有大小不等的涡体动荡于各流层间，除了粘性阻力，还存在着由于质点掺混，互相碰撞所造成的惯性阻力。

紊流阻力比层流阻力大得多。

层流到紊流的转变是与涡体的产生联系在一起的



🌸 层流受扰动后，当粘性的稳定作用起主导作用时，扰动就受到粘性的阻滞而衰减下来，层流就是稳定的。

🌸 当扰动占上风，粘性的稳定作用无法使扰动衰减下来，于是流动就变成紊流。

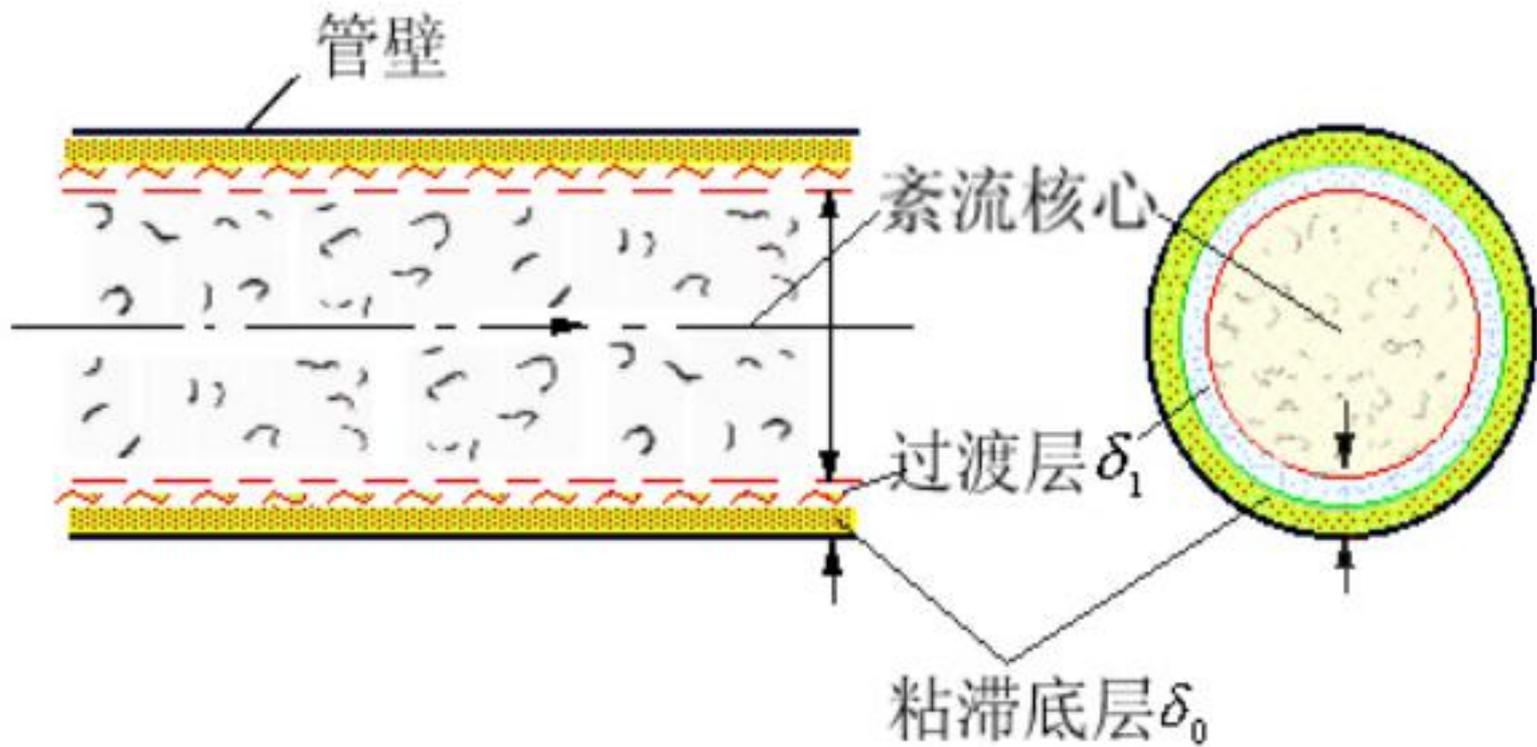
🌸 因此，流动呈现什么状态，取决于扰动的惯性作用和粘性的稳定作用相互斗争的结果。

🌸 雷诺数之所以能判别流态，因为它反映了惯性力与粘性力的对比关系

$$ma = \rho L^3 \frac{L}{T^2} = \rho L^3 \frac{v^2}{L}$$

$$\mu A \frac{du}{dn} = \mu L^2 \frac{v}{L}$$

$$\frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\rho L^3 \frac{v^2}{L}}{\mu L^2 \frac{v}{L}} = \frac{\rho v L}{\mu} = \text{Re}$$



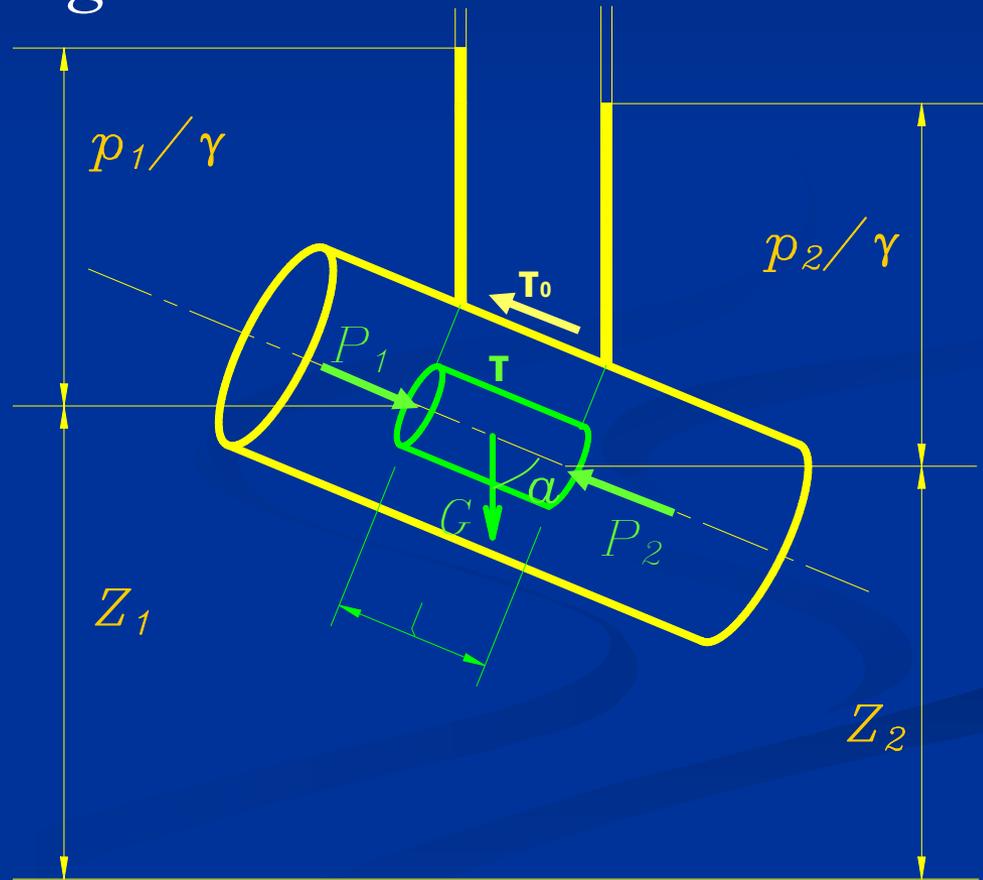
层流底层与紊流核心

# 第三节 圆管中的层流运动

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{l1-2}$$

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}, h_l = h_f$$

$$h_f = \left( Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left( Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right)$$



考虑所取流段在流向的受力平衡条件：

重力分量： $\gamma A l \cos \alpha$       端面压力： $p_1 A, p_2 A$

管壁切力： $\tau_0 \cdot l \cdot 2\pi r_0$

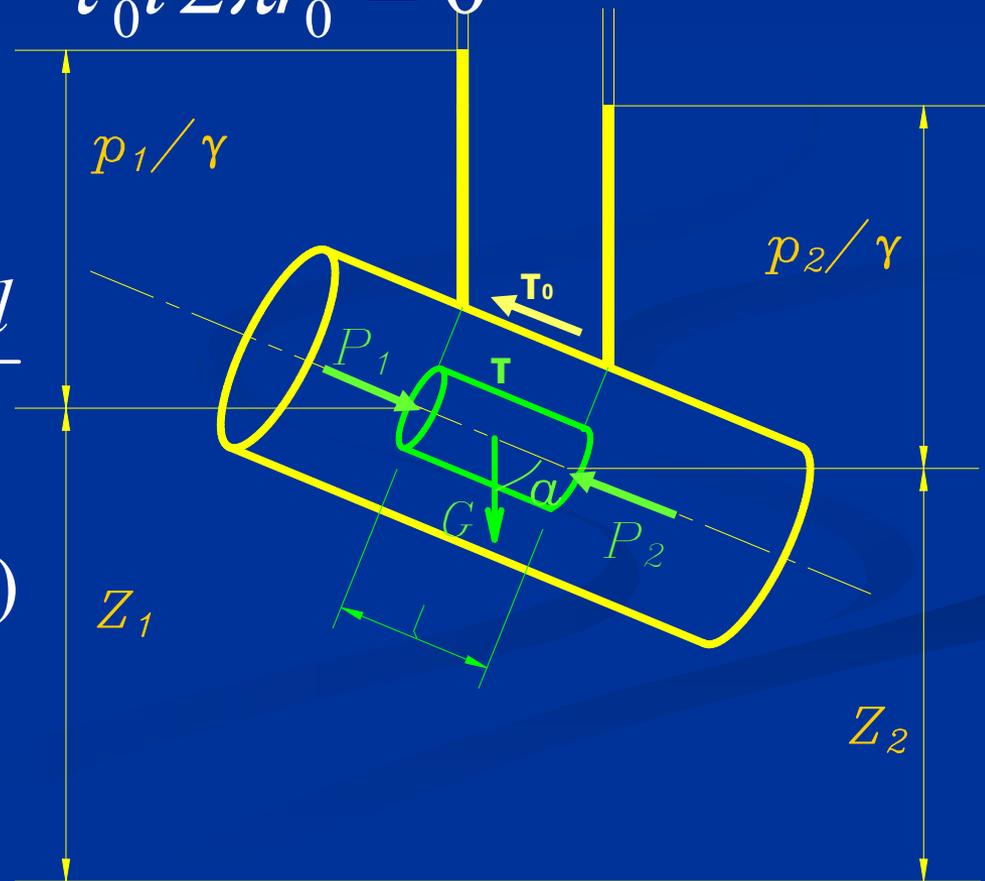
$$p_1 A - p_2 A + \gamma A l \cos \alpha - \tau_0 l 2\pi r_0 = 0$$

$$\therefore l \cos \alpha = Z_1 - Z_2$$

$$\therefore \left( Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left( Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \frac{2\tau_0 l}{\gamma r_0}$$

$$\therefore h_f = \left( Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left( Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right)$$

$$\therefore h_f = \frac{2\tau_0 l}{\gamma r_0}$$



$$h_f = \frac{2\tau_0 l}{\gamma r_0} \quad J = \frac{h_f}{l} = \frac{2\tau_0}{\gamma r_0} \quad \tau_0 = \gamma \frac{r_0}{2} J$$

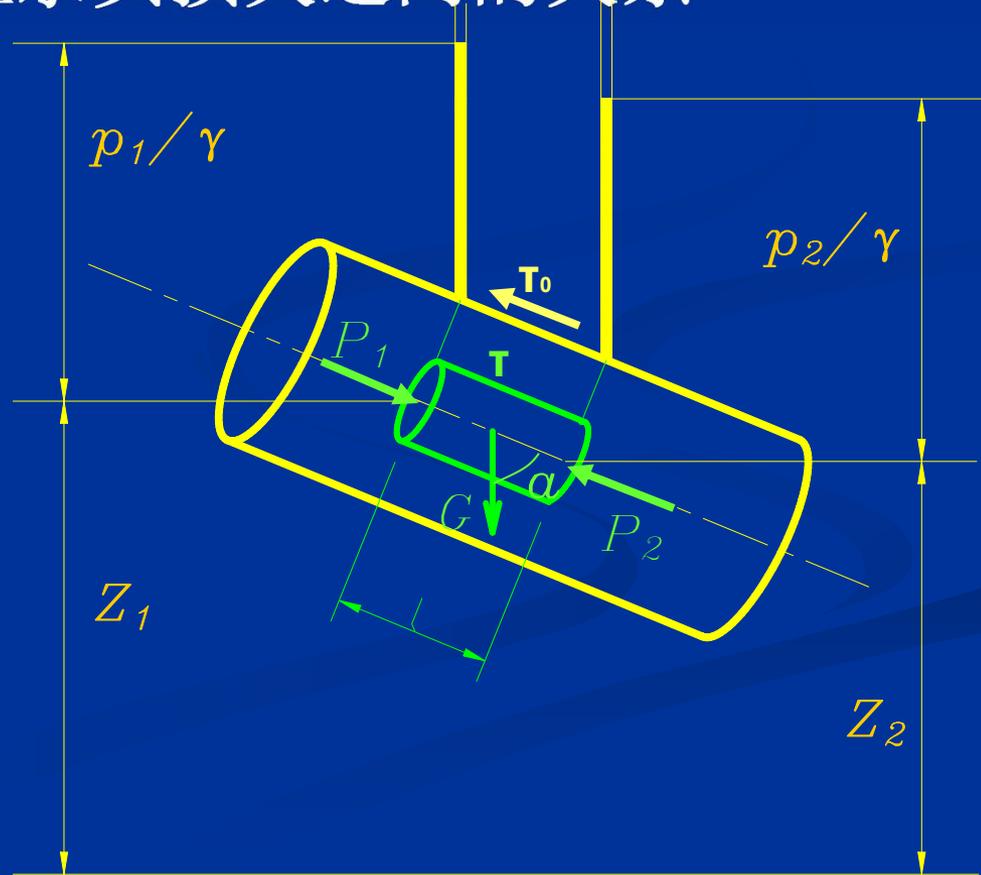
🔔 式中  $h_f/l$  为单位长度沿程损失，称为**水力坡度**，以  $J$  表示

上式反映了沿程水头损失与管壁切应力之间关系。

🔔 如取半径为  $r$  的同轴圆柱流体来讨论，可类似地求得管内任一点轴向切应力与沿程水头损失之间的关系

$$\tau = \gamma \frac{r}{2} J \quad \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{r}{r_0}$$

🔔 上式表明：在圆管均匀流中，切应力与半径成正比，在断面上按直线规律分布，轴线上为零，在管壁上达到最大值。



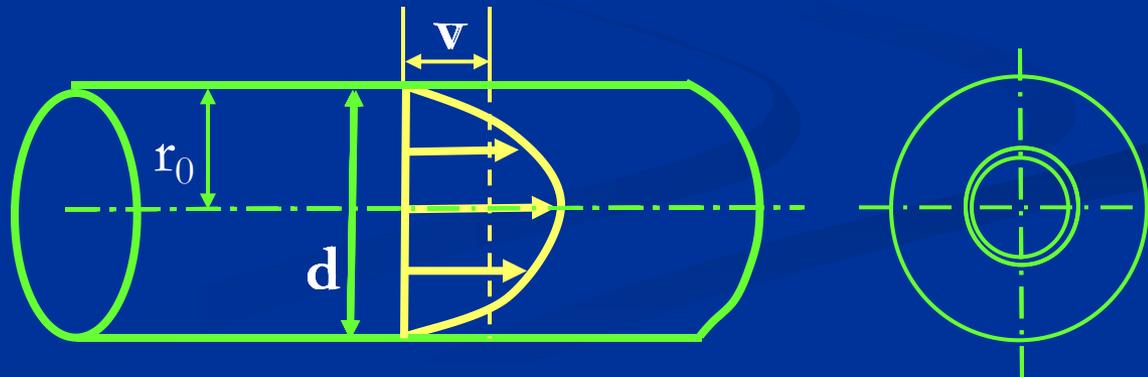
# 沿程阻力系数的计算

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad \tau = \gamma \frac{r}{2} J \quad du = -\frac{\gamma J}{2\mu} r dr$$

在均匀流中， $J$ 不变。对上式积分，并代入边界条件： $r=r_0$ 时， $u=0$

$$u = \frac{\gamma J}{4\mu} (r_0^2 - r^2)$$

可见，均匀圆管层流的断面流速分布是以管中心为轴的旋转抛物面。



$$u = \frac{\gamma J}{4\mu} (r_0^2 - r^2)$$

$r=0$ 时，在管轴上，达最大流速： $u_{\max} = \frac{\gamma J}{4\mu} r_0^2 = \frac{\gamma J}{16\mu} d^2$

将速度分布式代入平均流速定义式，得：

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{\int u dA}{A} = \frac{\int_0^{r_0} u \cdot 2\pi r dr}{A} = \frac{\gamma J}{8\mu} r_0^2 = \frac{\gamma J}{32\mu} d^2$$

$$v = \frac{1}{2} v_{\max}$$

$$h_f = \mathcal{H} = \frac{32\mu v l}{\gamma d^2}$$

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{32\mu vl}{\gamma d^2} = \frac{64}{\text{Re}} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

圆管层流沿程阻力系数的计算式： $\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$

它表明圆管层流的沿程阻力仅与雷诺数有关且成反比，与管壁粗糙无关。

动能修正系数和动量修正系数：

$$\alpha = \frac{\int u^3 dA}{\int v^3 dA} = \frac{\int u^3 dA}{v^3 A} \quad \alpha_0 = \frac{\int \rho u^2 dA}{\rho Q v} = \frac{\int u^2 dA}{A v^2}$$

层流的动能修正系数和动量修正系数分别为2和1.33。在实际工程中，大部分管流为紊流，故两修正系数均近似取1。

例题4-4：圆管直径2cm，流速12cm/s，水温10℃，求20m上的沿程水头损失。

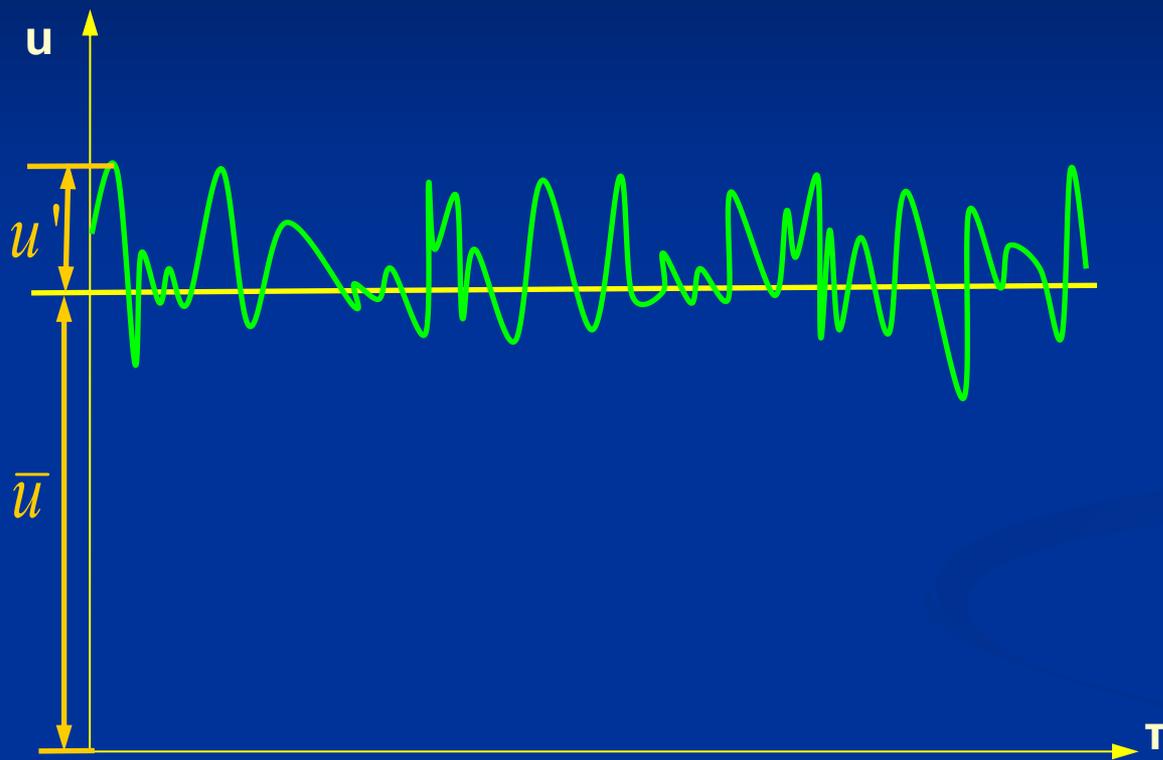
$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu} \quad \lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

例题4-5：在管径1cm，管长5m的圆管中，润滑油做层流运动，测得流量80cm<sup>3</sup>/s，水头损失30moil，求油的运动粘滞系数。

$$v = \frac{Q}{A} \quad h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad \lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad \text{Re} = \frac{vd}{\nu}$$

## 第四节 紊流运动的特征和紊流阻力

- ✿ 紊流流动是极不规则的流动，这种不规则性主要体现在紊流的脉动现象。
- ✿ 脉动现象是速度、压强等空间点上的物理量随时间的变化作无规则的变动。
- ✿ 研究紊流的方法是统计时均法。
- ✿ 时均法不着眼于瞬时状态，而是以某一个适当时间段内的时间平均参数作为基础去研究这段时间内的紊流时均特性。



紊流的脉动

用T时间段内的时间平均值代替瞬时值，则**时均速度**为：

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v_t dt$$

$\bar{S} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt$  称为紊流物理量S在一点上的**时均值**。

瞬时值和时均值之差称为**脉动值**，脉动值时正时负。

$$S = \bar{S} \pm S'$$

运用统计时均法就将紊流分成两个组成部分：

● 用时均值表示的时均流动

● 用脉动值表示的脉动流动

● 前者代表运动的**主流**，我们需要研究时均流动的特性，包括速度、切应力、流量及阻力计算公式等。

● 后者反映紊流的**本质**。它对时均流动中的一切特性无不产生巨大影响，也就是因为紊流中存在着这种脉动运动才使得时均流动表现出与层流的巨大差异。

紊流脉动强弱程度用**紊流度**来表示：

$$\varepsilon = \frac{1}{u} \sqrt{\frac{1}{3} (u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2)}$$

紊流可分为：

- 🌸 **均匀各向同性紊流**：不同点及同一点在不同的方向上的紊流特性都相同。
- 🌸 **自由剪切紊流**：边界为自由面而无固壁限制的紊流。
- 🌸 **有壁剪切紊流**：紊流在固壁附近的发展受限制。
- 🌸 和分子运动一样，紊流的脉动将引起流体微团之间的质量、动量、能量的交换。由于流体微团含有大量分子，这种交换较之分子运动强烈得多，从而产生了紊流扩散、紊流摩阻和紊流热传导等。

在紊流中,存在两种切应力:

**粘性切应力:**

时均流速不同,各流层间存在**相对运动**,牛顿内摩擦定律

**惯性切应力:**

**脉动**引起的动量交换产生的切应力,普朗特混合长度理论

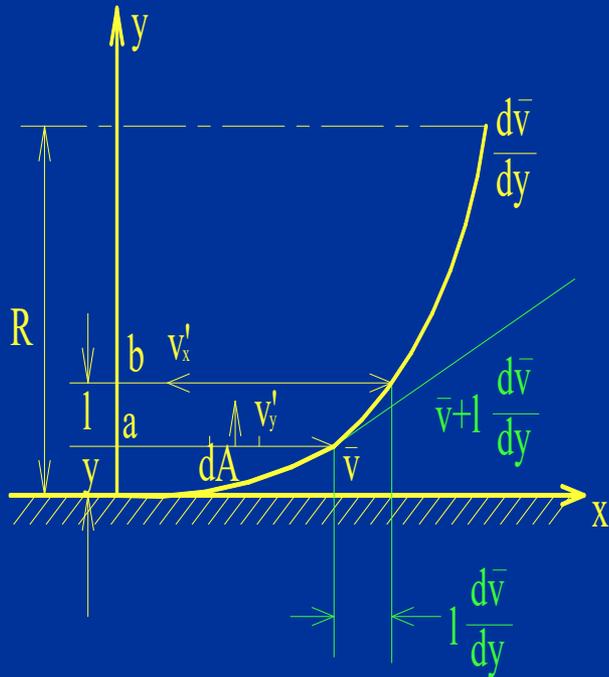
有一流体微团跳动,质量流量为  $\rho v'_y dA$

假定到达新位置以前,它原来的时均速度一直不变

$$\rho v'_y dA \bar{v} < \rho v'_y dA \left( \bar{v} + l \frac{d\bar{v}}{dy} \right)$$

在b层上出现一个瞬时的速度脉动

$$-v'_x$$



对于原来那个微元流体来说，它原来沿y方向脉动，到达b层后，引起b层的速度变化，在b层上产生x方向的脉动，如此纵横交互影响，脉动不已。这就是紊流中脉动频繁此起彼伏的根本原因。

由动量定理，流体微团在x方向上产生的新的脉动性的动量变化等于a, b两层之间的切向作用力。

$$F = \rho v'_y dA (-v'_x - 0) = -\rho v'_y v'_x dA \longrightarrow \tau = -\rho v'_y v'_x$$

$$\tau = -\rho v'_y v'_x$$

$$v'_y > 0, a \rightarrow b, v'_x < 0, v'_x v'_y < 0, \tau = -\rho v'_x v'_y > 0$$

$$v'_y < 0, b \rightarrow a, v'_x > 0, v'_x v'_y < 0, \tau = -\rho v'_x v'_y > 0$$

- 🔔 这是纯粹由于脉动原因而引起的脉动切应力，也称为雷诺切应力。
- 🔔 雷诺切应力是一个具有脉动性的物理量。
- 🔔 脉动对时均流有无影响，关键看在适当的时间段内脉动的物理量是否存在时均值。
- 🔔 雷诺切应力的时均值是存在的。

雷诺切应力任何时候都大于零，它的时均值不等于零。

$$\overline{\tau} = \frac{1}{T} \int_0^T \tau dt = -\rho \frac{1}{T} \int_0^T v'_x v'_y dt = -\rho \overline{v'_x v'_y}$$

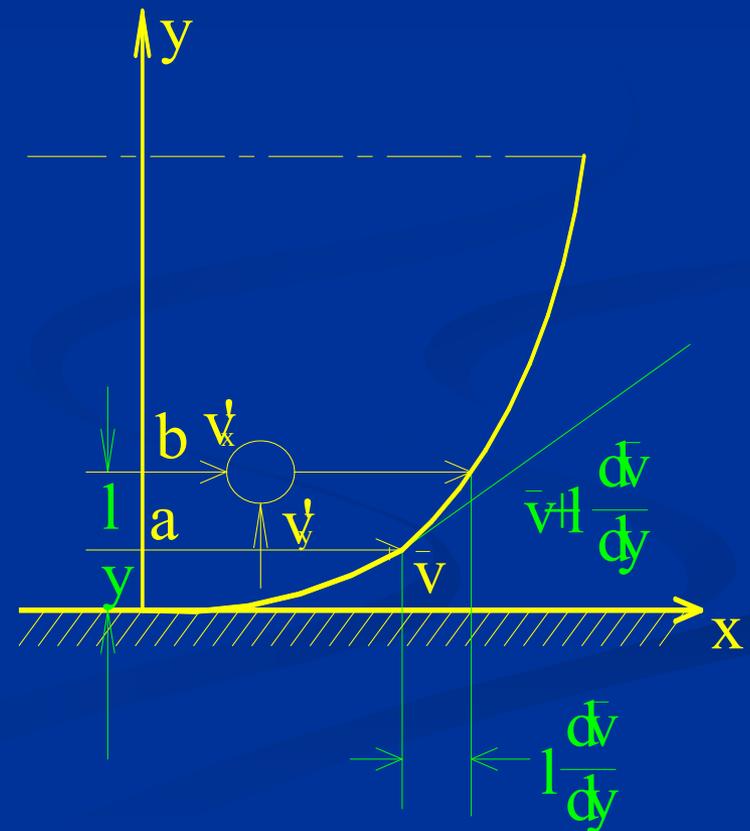
上式说明：由于脉动原因所产生的雷诺切应力虽然是个脉动量，但它存在时均值，对流动施加影响。这种影响就是在时均流动的层与层之间除了粘性流体本身具有的粘性切应力之外，还存在着一种由脉动引起且与时间无关的雷诺切应力。

普朗特混合长度理论不仅论证了雷诺切应力的存在和它与时间的无关性，还能给出雷诺切应力与时均流动参数之间的关系。

围绕流体微团划出一个微小控制体，用 $dA_x$ 和 $dA_y$ 表示控制体在X，Y方向的投影面积，根据连续性方程：

$$v'_x dA_x + v'_y dA_y = 0$$

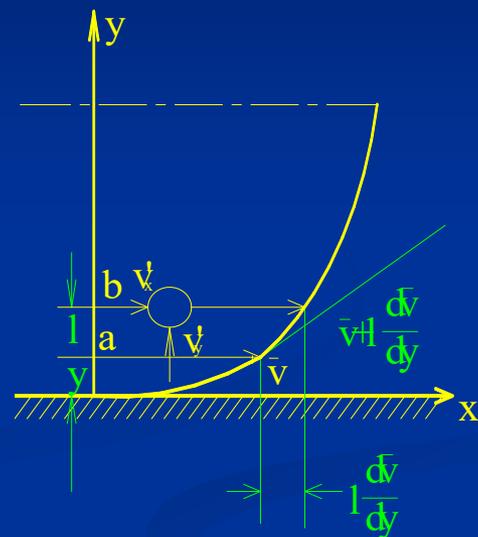
$$v'_y = -\frac{dA_x}{dA_y} v'_x = -k_1 v'_x$$



脉动速度  $v_x'$  促使 b 层时均速度降低，a 层时均速度提高，因此，它必然与 a, b 两层的时均速度之差成比例。

$$v_x' = k_2 l \frac{d\bar{v}}{dy} \quad v_y' = -k_1 k_2 l \frac{d\bar{v}}{dy}$$

$$\bar{\tau} = -\overline{\rho v_x' v_y'} \quad \bar{\tau} = \rho k_1 k_2^2 l^2 \left( \frac{d\bar{v}}{dy} \right)^2$$



其中  $\left(\frac{d\bar{v}}{dy}\right)^2$  与时间无关，可自时均符号中提出，令  $k_1 k_2^2 = k_3^2$  则脉动切应力的时均值为：

$$\bar{\tau} = \rho \overline{(k_3 l)^2} \left( \frac{d\bar{v}}{dy} \right)^2 = \rho \bar{L}^2 \left( \frac{d\bar{v}}{dy} \right)^2$$

$$\bar{\tau} = \overline{\rho(k_3 l)^2 \left(\frac{d\bar{v}}{dy}\right)^2} = \rho \bar{L}^2 \left(\frac{d\bar{v}}{dy}\right)^2$$

这就是用时均参数表示的脉动切应力。L称为混合长度。

紊流中的时均切应力可以用粘性切应力和脉动切应力之和来表示

$$\bar{\tau} = \mu \frac{d\bar{v}}{dy} + \rho \bar{L}^2 \left(\frac{d\bar{v}}{dy}\right)^2 = (\mu + \eta) \frac{d\bar{v}}{dy}$$

式中  $\eta = \rho \bar{L}^2 \frac{d\bar{v}}{dy}$  称为紊流粘度或虚粘度，因为它实际上并非流体本身的物理属性，层流变成紊流时，液体粘度并未改变，这一名词只是与动力粘度并列而得到的。

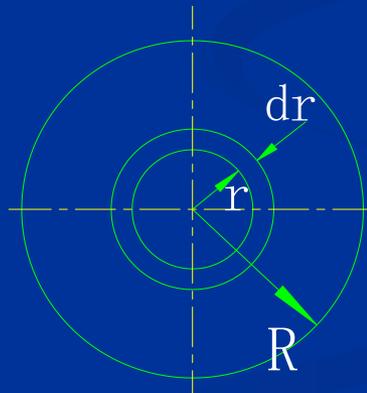
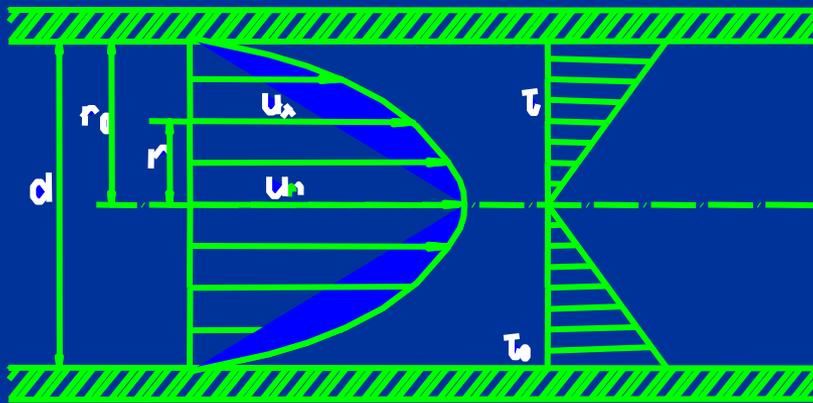
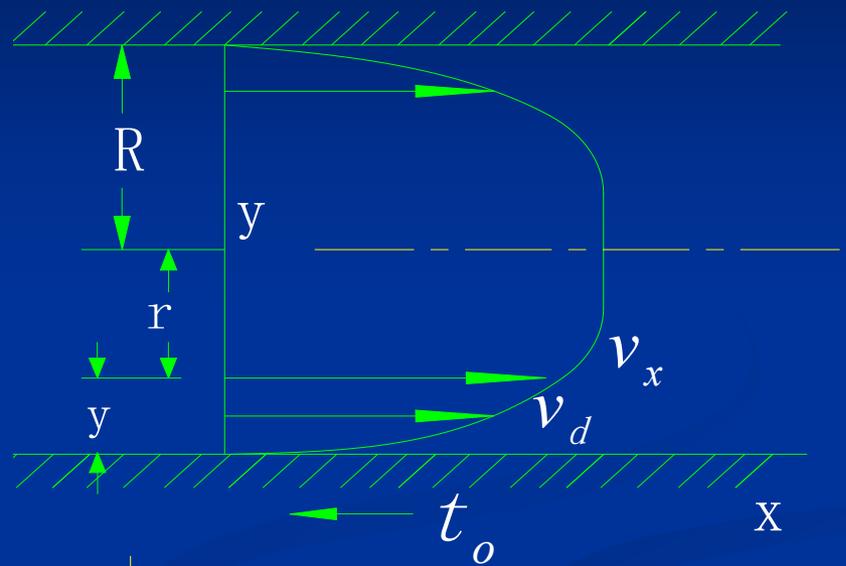
🔔 将混合长度理论用于圆管紊流，可以从理论上证明当圆管中的流动为紊流时，断面上流速分布是对数型的。

$$u = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln y + C$$

$y$ : 离圆管壁的距离

$\beta$ : 卡门通用常数

$C$ : 积分常数



层流时的切应力是由于分子运动的动量交换引起的粘性切应力，而紊流切应力除了粘性切应力外，还包括流体微团脉动引起的动量交换所产生的惯性切应力。由于脉动交换远大于分子交换，因此在紊流充分发展的流域内，惯性切应力远大于粘性切应力，也就是说，**紊流切应力主要是惯性切应力。**