第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
(数学类)

一、**(10分)** 设 $\varepsilon \in (0,1)$, $x_0 = a$, $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$. 证明: $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在, 且 ξ 为方程 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的唯一根.

证明: 注意到 $|(\sin x)'| = |\cos x| \le 1$, 由中值定理, 我们有

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y|, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

....(2 分)

所以

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |\varepsilon(\sin x_{n+1} - \sin x_n)| \le \varepsilon |x_{n+1} - x_n|, \qquad n = 0,1,2,\ldots.$$

....(4 分)

从而可得

$$|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon^n |x_1 - x_0|, \qquad \forall\, n = 0,1,2,\ldots.$$

于是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛, 从而 $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在.

....(6 分)

对于递推式 $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ 两边取极限即得 ξ 为 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的根.

....(8 分)

进一步, 设 η 也是 $x - \varepsilon \sin x = a$, 即 $\eta - \varepsilon \sin \eta = a$ 的根, 则

$$|\xi - \eta| = \varepsilon |\sin \xi - \sin \eta| \le \varepsilon |\xi - \eta|.$$

所以由 $\varepsilon \in (0,1)$ 可得 $\eta = \xi$. 即 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的根唯一. 证毕

....(10 分)

□

二、**(15 分)** 设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证明 $X^2 = B$ 无解, 这里 X 为三阶未知复方阵.

证明: 反证法. 设方程有解, 即存在复矩阵 A 使得 $A^2 = B$.

....(2 分)

我们注意到 B 的特征值为 0, 且其代数重数为 3.

....(4 分)

设 λ 为 A 的一个特征值, 则 λ^2 为 B 的特征值. 所以 $\lambda = 0$. 从而 A 的特征值均为 0.

....(6 分)

于是 A 的 Jordan 标准型只可能为$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 或 $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

....(10 分)

从而 A^2 的 Jordan 标准型只能为 $J_1 = J_1^2 = J_2^2$ 或 $J_2 = J_3^2$.

....(12 分)

因此 A^2 的秩不大于 1, 与 $B = A^2$ 的秩为 2 矛盾.

所以 $X^2 = B$ 无解. 证毕.

....(15 分)

□

三、**(10 分)** 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是凸区域, 函数 $f(x,y)$ 是凸函数. 证明或否定: $f(x,y)$ 在 D 上连续.

注: 函数 $f(x,y)$ 为凸函数的定义是 $\forall\, \alpha \in (0,1)$ 以及 $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D$, 成立

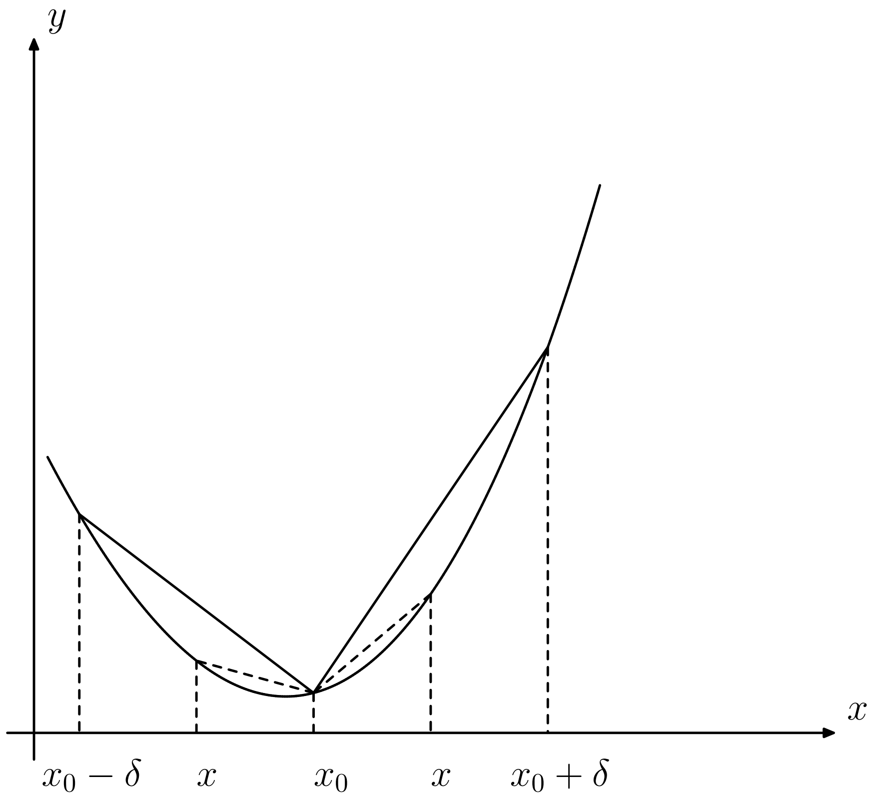
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \le \alpha f(x_1,y_1) + (1-\alpha) f(x_2,y_2).$$

证明: 结论成立. 我们分两步证明结论.

(i) 对于 $\delta > 0$ 以及 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 上的一元凸函数 $g(x)$, 容易验证 $\forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$:

$$\frac{g(x_0) - g(x_0-\delta)}{d} \le \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \le \frac{g(x_0+\delta) - g(x_0)}{\delta}.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(2 分)



从而

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right| \le \left|\frac{g(x_0+\delta)-g(x_0)}{\delta}\right|+\left|\frac{g(x_0)-g(x_0-\delta)}{\delta}\right|, \qquad \forall\, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

由此即得 $g(x)$ 在 x_0 连续. 一般地, 可得开区间上的一元凸函数连续.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(4 分)

(ii) 设 $(x_0,y_0)\in D$. 则有 $\delta>0$ 使得

$$E_\delta \equiv [x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-\delta,y_0+\delta]\subset D.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(5 分)

注意到固定 x 或 y 时, $f(x,y)$ 作为一元函数都是凸函数, 由 (i) 的结论, $f(x,y_0), f(x,y_0+\delta), f(x,y_0-\delta)$ 都是 $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上的连续函数, 从而它们有界, 即存在常数 $M_\delta>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\frac{|f(x,y_0+\delta)-f(x,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x,y_0)-f(x,y_0-\delta)|}{\delta}\\&+\frac{|f(x_0+\delta,y_0)-f(x_0,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x_0,y_0)-f(x_0-\delta,y_0)|}{\delta}\\\le\ & M_\delta, \qquad\qquad \forall\, x\in[x_0-\delta,x_0+\delta].\end{aligned}$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$(7 分)

进一步, 由 (i) 的结论, 对于 $(x,y)\in E_\delta$,

$$\begin{aligned}
& |f(x,y)-f(x_0,y_0)| \\
\leq\ & |f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| \\
\leq\ & \Big(\frac{|f(x,y_0+\delta)-f(x,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x,y_0)-f(x,y_0-\delta)|}{\delta}\Big)|y-y_0| \\
& +\Big(\frac{|f(x_0+\delta,y_0)-f(x_0,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x_0,y_0)-f(x_0-\delta,y_0)|}{\delta}\Big)|x-x_0| \\
\leq\ & M_\delta|y-y_0|+M_\delta|x-x_0|.
\end{aligned}$$

于是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 证毕.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$(10 分)

□

四、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 在 $x=1$ 可导, $f(1)=0$, $f'(1)=a$. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)\,dx=-a.$$

证明: 记 $M=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|<+\infty$. 令 $r(x)=f(x)-f(1)-f'(1)(x-1)=f(x)-a(x-1)$. 则由 Peano 型的 Taylor 展式可得 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta\in(0,1)$, 使得当 $\delta<x\leq 1$ 时,

$$|r(x)|\leq\varepsilon(1-x).$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$(2 分)

我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n f(x)\,dx &= \int_0^\delta x^n f(x)\,dx+\int_\delta^1 ax^n(x-1)\,dx+\int_\delta^1 x^n r(x)\,dx \\
&= R_1+R_2+R_3.
\end{aligned}$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$(4 分)

注意到

$$|R_1|\leq M\int_0^\delta x^n\,dx=M\frac{\delta^{n+1}}{n+1},$$

$$R_2=-\frac{a}{(n+1)(n+2)}+a\Big(\frac{\delta^{n+1}}{n+1}-\frac{\delta^{n+2}}{n+2}\Big)$$

以及

$$
\begin{aligned}
|R_3| &\le \int_\delta^1 x^n |r(x)|\,dx \le \varepsilon \int_\delta^1 x^n (1-x)\,dx \\
&\le \varepsilon \int_0^1 x^n (1-x)\,dx = \frac{\varepsilon}{(n+1)(n+2)},
\end{aligned}
$$

我们有

$$\lim_{n\to+\infty} |n^2 R_1| = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} |n^2 R_2 + a| = 0$$

以及

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |n^2 R_3| \le \varepsilon.$$

....(8 分)

所以

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left| n^2 \int_0^1 x^n f(x)\,dx + a \right| \le \varepsilon.$$

由上式及 $\varepsilon > 0$ 的任意性即得

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x)\,dx = -a.$$

证毕.

....(10 分)

$\square$

五、(15 分) 已知二次曲面 Σ (非退化)过以下九点：$A(1,0,0)$, $B(1,1,2)$, $C(1,-1,-2)$, $D(3,0,0)$, $E(3,1,2)$, $F(3,-2,-4)$, $G(0,1,4)$, $H(3,-1,-2)$, $I(5,2\sqrt{2},8)$. 问 Σ 是哪一类曲面？

解答: 易见, A、B、C 共线, D、E、F 共线.

....(6 分)

而只有两种二次曲面上可能存在共线的三点: 单叶双曲面和双曲抛物面.

....(10 分)

然后，可以看到直线 ABC 和直线 DEF 是平行的，且不是同一条直线.

....(12 分)

这就又排除了双曲抛物面的可能(双曲抛物面的 同族直母线都异面，不同族直母线都相交), 所以只可能是单叶双曲面.

....(15 分)

注: 这个曲面其实是(不要求学生写出方程式)

$$(x-2)^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1.$$

六、(20 分) 设 A 为 $n\times n$ 实矩阵(未必对称), 对任一 n 维实向量 $\alpha\equiv(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha A\alpha^\top\geq 0$ (这里 $\alpha^\top$ 表示 α 的转置), 且存在 n 维实向量 β, 使得 $\beta A\beta^\top=0$, 同时对任意 n 维实向量 x 和 y, 当 $xAy^\top\neq 0$ 时有 $xAy^\top+yAx^\top\neq 0$. 证明: 对任意 n 维实向量 v, 都有 $vA\beta^\top=0$.

证明: 取任意实数 r, 由题设知

$$(v+r\beta)A(v+r\beta)^\top\geq 0.$$

....(8 分)

即

$$vAv^\top+rvA\beta^\top+r\beta Av^\top+r^2\beta A\beta^\top\geq 0.$$

....(12 分)

亦即

$$vAv^\top+r\Big(vA\beta^\top+\beta Av^\top\Big)+r^2\beta A\beta^\top\geq 0.$$

....(14 分)

若 $vA\beta^\top\neq 0$, 则有 $vA\beta^\top+\beta Av^\top\neq 0$. 因此可取适当的实数 r 使得

$$vAv^\top+r\Big(vA\beta^\top+\beta Av^\top\Big)+r^2\beta A\beta^\top<0.$$

盾. 证毕.

....(20 分)

□

七、(10 分) 设 f 在区间 $[0,1]$ 上Riemann 可积, $0\leq f\leq 1$. 求证: 对任何 $\varepsilon>0$, 存在只取值 $0,1$ 的分段(段数有限)常值函数 $g(x)$, 使得 $\forall\,[\alpha,\beta]\subseteq[0,1]$,

$$\Big|\int_\alpha^\beta\big(f(x)-g(x)\big)\,dx\Big|<\varepsilon.$$

证明: 取定 $n > \frac{2}{\varepsilon}$. 定义 $A_m = \Big[\dfrac{m}{n}, \dfrac{m}{n} + \displaystyle\int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}} f(t)\,dt\Big)$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bigcup\limits_{m=0}^{n-1} A_m, \\ 0, & x \notin \bigcup\limits_{m=0}^{n-1} A_m. \end{cases}$$

……………………………………(5 分)

对于 $0 \le \alpha < \beta \le 1$, 设非负整数 $k \le \ell$ 满足 $\dfrac{k}{n} \le \alpha < \dfrac{k+1}{n}$, $\dfrac{\ell}{n} \le \beta < \dfrac{\ell+1}{n}$, 则

$$\begin{aligned} & \Big| \int_\alpha^\beta \big(f(x) - g(x)\big)\,dx \Big| \\ \le\ & \int_\alpha^{\frac{k+1}{n}} |f(x) - g(x)|\,dx + \Big| \int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{\ell}{n}} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx \Big| + \int_{\frac{\ell}{n}}^{\beta} |f(x) - g(x)|\,dx \\ \le\ & \int_\alpha^{\frac{k+1}{n}} 1\,dx + 0 + \int_{\frac{\ell}{n}}^{\beta} 1\,dx \\ \le\ & \frac{2}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

证毕.

……………………………………(10 分)

□

八、(10 分) 已知 $\varphi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 是一个严格单调下降的连续函数, 满足

$$\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = +\infty.$$

若

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \varphi^{-1}(t)\,dt = a < +\infty,$$

其中 φ^{-1} 表示 φ 的反函数. 求证:

$$\int_0^{+\infty} [\varphi(t)]^2\,dt + \int_0^{+\infty} [\varphi^{-1}(t)]^2\,dt \ge \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}}.$$

证明: 令 $P = \int_p^{+\infty} \varphi(t)\,dt$, $Q = \int_q^{+\infty} \varphi^{-1}(t)\,dt$, $I = a - P - Q$, 其中 $pq = a$.

……………………………………(2 分)

则

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\left(\varphi^{-1}(t)\right)^2 dt \geq \int_0^{q}\left(\varphi^{-1}(t)\right)^2 dt\\
\geq\ &\frac{1}{q}\Big(\int_0^{q}\varphi^{-1}(t)\,dt\Big)^2=\frac{1}{q}(a-Q)^2=\frac{1}{q}(I+P)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\left(\varphi(t)\right)^2 dt \geq \int_0^{p}\left(\varphi(t)\right)^2 dt\\
\geq\ &\frac{1}{p}\Big(\int_0^{p}\varphi(t)\,dt\Big)^2=\frac{1}{p}(a-P)^2=\frac{1}{p}(I+Q)^2.
\end{aligned}
$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(6 分)

因此,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\left(\varphi(t)\right)^2 dt+\int_0^{+\infty}\left(\varphi^{-1}(t)\right)^2 dt\\
\geq\ &\frac{1}{p}(I+Q)^2+\frac{1}{q}(I+P)^2\\
\geq\ &\frac{2}{\sqrt{pq}}(I+P)(I+Q)=\frac{2}{\sqrt{a}}\Big(QP+aI\Big).
\end{aligned}
$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(8 分)

易见可取到适当的 p,q 满足 $P=Q=\dfrac{a-I}{2}$, 从而

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\left(\varphi(t)\right)^2 dt+\int_0^{+\infty}\left(\varphi^{-1}(t)\right)^2 dt\\
\geq\ &\frac{1}{a}\Big(\frac{(a-I)^2}{4}I+aI\Big)=\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{(a+I)^2}{4}\geq\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

证毕.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(10 分)

$\square$