

第七届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案及评分标准 (数学类, 2015年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

一、(本题 15 分) 设 L_1 和 L_2 是空间中两异面直线. 设在标准直角坐标系下直线 L_1 过坐标为 a 的点, 以单位向量 v 为直线方向; 直线 L_2 过坐标为 b 的点, 以单位向量 w 为直线方向.

1) 证明: 存在唯一点 $P \in L_1$ 和 $Q \in L_2$ 使得两点连线 PQ 同时垂直于 L_1 和 L_2 .

2) 求 P 点和 Q 点坐标(用 a, b, v, w 表示).

解: 1) 过直线 L_2 上一点和线性无关向量 v 和 w 做平面 σ , 则直线 L_2 落在平面 σ 上, 且直线 L_1 平行于平面 σ . 过 L_1 做平面 τ 垂直于平面 σ , 记两平面交线为 L_1^* . 设两直线 L_1^* 和 L_2 的交点为 Q , 过 Q 做平面 σ 的法线, 交直线 L_1 为 P , 则 PQ 同时垂直于 L_1 和 L_2(4分)

设 $X = P + sv \in L_1$ 和 $Y = Q + tw \in L_2$ 也使得 XY 同时垂直于 L_1 和 L_2 , 则有 $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} - sv + tw$ 垂直于 v 和 w , 故有 $-s + (v \cdot w)t = 0$ 和 $-s(v \cdot w) + t = 0$. 由于 $(v \cdot w)^2 < 1$, 我们得到 $s = t = 0$, 即 $X = P, Y = Q$, 这样的 P 和 Q 存在且唯一.(8分)

2) 设 $P = a + sv \in L_1$ 和 $Q = b + tw \in L_2$. 因为 $\overrightarrow{PQ} = \lambda v \times w$, 我们得到

$$(b - a) - sv + tw = \lambda v \times w, \quad \text{.....(11分)}$$

于是有

$$(b - a) \cdot v - s + t(v \cdot w) = 0, (b - a) \cdot w - s(v \cdot w) + t = 0$$

故有

$$s = \frac{(b - a) \cdot (v - (v \cdot w)w)}{1 - (v \cdot w)^2}, t = \frac{(a - b) \cdot (w - (v \cdot w)v)}{1 - (v \cdot w)^2}$$

得到

$$P = a + \frac{(b - a) \cdot (v - (v \cdot w)w)}{1 - (v \cdot w)^2}v, Q = b + \frac{(a - b) \cdot (w - (v \cdot w)v)}{1 - (v \cdot w)^2}w. \quad \text{.....(15分)}$$

专业:

考生座位号:

所在院校:

准考证号:

姓名:

密封线 答题时不要超过此线

二、(本题 20 分) A 为 4 阶复方阵, 它满足关于迹的关系式: $\text{tr} A^i = i, i = 1, 2, 3, 4$. 求 A 的行列式.

解 $|A| = \frac{1}{24}$, 过程如下:

首先, 记 A 的 4 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, A 的特征多项式为 $p(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. 则由 $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)$ 可知

$$\begin{cases} a_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 \\ a_1 = -(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4) \\ a_0 = |A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \end{cases}$$

其次, 由于迹在相似变换下保持不变, 故由 A 的约当标准形 (或 Schur 分解) 立知

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \cdots \cdots \cdots (1) \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = 2 \cdots \cdots \cdots (2) \\ \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_4^3 = 3 \cdots \cdots \cdots (3) \\ \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4 + \lambda_4^4 = 4 \cdots \cdots \cdots (4) \end{cases}$$

.....(10分)

由 (1) 和 (2) 得

$$a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 = -\frac{1}{2}$$

由 (1) 两边立方得

$$1 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_4^3 + 3\lambda_1^2(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + 3\lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) + 3\lambda_3^2(\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_4) + 3\lambda_4^2(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_1) - 6a_1$$

再由 (1) (2) (3) 即得

$$1 = 3 + 3\lambda_1^2 - 3\lambda_1^3 + 3\lambda_2^2 - 3\lambda_2^3 + 3\lambda_3^2 - 3\lambda_3^3 + 3\lambda_4^2 - 3\lambda_4^3 - 6a_1$$

$$a_1 = -\frac{1}{6}$$

最后, 由 $p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda + a_0$ 得

$$\begin{cases} p(\lambda_1) = 0 \\ \vdots \\ p(\lambda_4) = 0 \end{cases}$$

相加得

$$4 - 3 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{6} \times 1 + 4a_0 = 0$$

结果 $a_0 = \frac{1}{24}$, 亦即 A 的行列式为 $\frac{1}{24}$. □

.....(20分)

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 考生座位号: _____ 专业: _____

密封线 答题时不要超过此线

三、(本题 15 分) 设 A 为 n 阶实方阵, 其 n 个特征值皆为偶数. 试证明关于 X 的矩阵方程

$$X + AX - XA^2 = 0$$

只有零解。

证明 设 $C = I + A$, $B = A^2$, A 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 B 的 n 个特征值为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$; C 的 n 个特征值为 $\mu_1 = \lambda_1 + 1, \mu_2 = \lambda_2 + 1, \dots, \mu_n = \lambda_n + 1$; C 的特征多项式为 $p_C(\lambda) = (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) \cdots (\lambda - \mu_n)$.

.....(5分)

若 X 为 $X + AX - XA^2 = 0$ 的解, 则有 $CX = XB$; 进而 $C^2X = XB^2, \dots, C^kX = XB^k \dots$, 结果 $0 = p_C(C)X = Xp_C(B) = X(B - \mu_1 I) \cdots (B - \mu_n I)$. 注意到 B 的 n 个特征值皆为偶数, 而 C 的 n 个特征值皆为奇数, 故

$B - \mu_1 I, \dots, B - \mu_n I$ 皆为可逆矩阵, 结果由 $0 = X(B - \mu_1 I) \cdots (B - \mu_n I)$ 立得 $X = 0$. \square

.....(15分)

四、(本题 15 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$, $a_1 > 0$. 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - n)$ 存在.

证明 $a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} \geq 2$. 若 $a_n \geq n$, 则

$$a_{n+1} - (n+1) = a_n + \frac{n}{a_n} - n - 1 = (1 - \frac{1}{a_n})(a_n - n) \geq 0, \text{ 故}$$

$a_n \geq n, \forall n \geq 2$, 且 $a_n - n$ 单调递减.

.....(5分)

令 $b_n = n(a_n - n)$, 则

$$b_{n+1} = (n+1)(a_{n+1} - n - 1) = (n+1)(a_n + \frac{n}{a_n} - n - 1)$$

$$= (a_n - n)(n+1)(1 - \frac{1}{a_n}) = (1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{a_n})b_n$$

$$= (1 + \frac{a_n - n}{na_n} - \frac{1}{na_n})b_n = (1 + R_n)b_n, \text{ 其中 } R_n = \frac{a_n - n}{na_n} - \frac{1}{na_n}. \text{ 从而 } b_n = b_2 \prod_{k=2}^{n-1} (1 + R_k).$$

.....(10分)

考察 R_n .

$$|R_n| \leq |\frac{a_n - n}{na_n}| + \frac{1}{na_n} \leq \frac{1 + |a_2 - 2|}{n^2}, n \geq 2.$$

结果由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^{n-1} (1 + R_k)$ 存在知 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - n)$ 存在.

.....(15分)

五、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上有界连续函数, $h(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上连续函数, 且 $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt = a < 1$. 构造函数列如下: $g_0(x) = f(x)$,

$$g_n(x) = f(x) + \int_0^x h(t)g_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

求证 $\{g_n(x)\}$ 收敛于一个连续函数, 并求其极限函数.

证明 记 $M = \sup |f(x)|$. 因而 $|g_0(x)| \leq M$. 假设 $|g_{n-1}(x)| \leq (1 + a + \dots + a^{n-1})M$. 由 (1) 可得

$$\begin{aligned} |g_n(x)| &\leq |f(x)| + \int_0^x |h(t)| |g_{n-1}(t)| dt \\ &\leq M + \int_0^{+\infty} |h(t)| (1 + a + \dots + a^{n-1}) M dt \\ &= M + a(1 + a + \dots + a^{n-1})M \\ &= (1 + a + \dots + a^{n-1} + a^n)M. \end{aligned}$$

因此 $|g_n(x)| \leq \frac{1-a^{n+1}}{1-a}M$. 由 (1) 可得

$$g_n(x) - g_{n-1}(x) = \int_0^x h(t)(g_{n-1}(t) - g_{n-2}(t)) dt,$$

由此可得

$$\sup |g_n(x) - g_{n-1}(x)| \leq a \sup |g_{n-1}(x) - g_{n-2}(x)|.$$

从而

$$\sup |g_n(x) - g_{n-1}(x)| \leq a^{n-1} \sup |g_1(x) - g_0(x)| \leq a^n M.$$

.....5分

由于 $a \in [0, 1)$, 从上面这个式子, 可知函数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (g_n(x) - g_{n-1}(x))$$

在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛, 即函数列 $\{g_n(x)\}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛. 因为函数列的每一项都连续, 因而其极限函数 $g(x)$ 也是连续函数.10分

在 (1) 的两边取极限得

$$g(x) = f(x) + \int_0^x h(t)g(t) dt. \quad (2)$$

记 $\psi(x) = \int_0^x h(t)g(t) dt$, $H(x) = \int_0^x h(t) dt$, 则此二函数可导, 且 $\psi'(x) = h(x)g(x)$, $H'(x) = h(x)$. 由 (2) 得

$$\psi'(x) - h(x)\psi(x) = h(x)f(x).$$

因而

$$(e^{-H(x)}\psi(x))' = e^{-H(x)}h(x)f(x).$$

两边积分可得

$$e^{-H(x)}\psi(x) = \int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t) dt.$$

即,

$$\psi(x) = e^{H(x)} \int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t) dt.$$

将此代入 (2) 就得到

$$g(x) = f(x) + e^{H(x)} \int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t) dt.$$

.....15分

专业:

考生座位号:

所在院校:

准考证号:

姓名:

密封线 答题时不要超过此线

六、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上有下界或者有上界的连续函数且存在正数 a 使得

$$f(x) + a \int_{x-1}^x f(t) dt$$

为常数。求证: $f(x)$ 必为常数。

证明: 不妨设 $f(x)$ 有下界。设 $m = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$, $g(x) = f(x) - m$, 则 $g(x)$ 为非负连续函数, 且

$$A = g(x) + a \int_{x-1}^x g(t) dt \tag{1}$$

为非负常数。5分

由 (1) 知 $g(x)$ 是可微函数, 且

$$g'(x) + a(g(x) - g(x-1)) = 0. \tag{2}$$

由此

$$(e^{ax}g(x))' = ae^{ax}g(x-1) \geq 0.$$

这说明 $e^{ax}g(x)$ 是递增函数。10分

由 (1), 可得

$$\begin{aligned} A &= g(x) + a \int_{x-1}^x e^{at}g(t)e^{-at} dt \\ &\leq g(x) + ae^{ax}g(x) \int_{x-1}^x e^{-at} dt \\ &= g(x) + e^{ax}g(x)(e^{-a(x-1)} - e^{-ax}) \\ &= e^a g(x). \end{aligned}$$

由此, 可得

$$g(x) \geq Ae^{-a}.$$

..... 15分

由 $g(x)$ 的定义知, $g(x)$ 的下确界为零, 因此 $A = 0$. 再根据 (1) 可知 $g(x)$ 恒等于零, 即 $f(x)$ 为常数。20分